



TITLE:

# 有限要素法の電気機器への適用と 誘導電動機の磁気特性解析に関する研究( Dissertation\_全文 )

AUTHOR(S):

高橋, 則雄

---

CITATION:

高橋, 則雄. 有限要素法の電気機器への適用と誘導電動機の磁気特性解析に関する研究. 京都大学, 1982, 工学博士

ISSUE DATE:

1982-01-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r4623>

RIGHT:

有限要素法の電気機器への適用と  
誘導電動機の磁気特性解析に関する研究

昭和 56 年 10 月

高 橋 則 雄

# 有限要素法の電気機器への適用と 誘導電動機の磁気特性解析に関する研究

昭和 56 年 10 月

高 橋 則 雄

DOC
1981
21
電気系

## 内容梗概

本論文は、有限要素法を電気機器の磁気特性解析に適用するための新手法の考案と、これを用いた単相及び三相誘導電動機の磁気特性解析について論及したものである。すなわち、外部電源を考慮した有限要素法、寸法決定法を導入した有限要素法を考案して、定電圧源に接続して運転される電気機器の磁気特性解析、所与の磁束分布を満足する磁気回路設計を可能にするとともに、ギャップ要素、シールド要素、延長要素なる特殊要素を考案し、ギャップ、シールド等を有する電気機器の実用的な磁気特性解析を可能にした。更に、これらの新手法を単相及び三相誘導電動機の磁気特性解析に適用して種々の知見を得るとともに、実験的にも検討を行った。本論文は、緒論、本文4章、結論及び付録から成り、その概要は以下の通りである。

緒論では、本研究の目的とそれを達成するための研究課題と研究方針について述べる。

第1章では、外部電源を考慮した有限要素法及び寸法決定法を導入した有限要素法を考案し、これを用いれば、従来不可能であった単相誘導電動機の磁気特性解析や所与の磁束分布を満足する磁気回路設計が可能になることを示した。これらの新手法は次のような特長を有する。

- (1) 多数の強制電流が未知の場合でも、外部電源の電圧が与えられると、これらを直接求めることができる。
- (2) 電気機器の寸法を修正することにより所望の磁束分布を得たい場合には、修正する部分を指定することにより、必要な寸法を直ちに求めることができる。
- (3) 繰返し計算を必要としないので、計算時間を大幅に短縮できる。

第2章では、ギャップ要素、シールド要素及び延長要素を考案し、こ



これらの新要素を用いれば、電気機器の最適寸法のシミュレーションを極めて容易に行うことができることを示すとともに、電磁石の吸引力解析、電磁シールド効果の解析、変圧器鉄心窓寸法が磁束分布に及ぼす影響の検討に適用し、その有用性を明らかにした。

第3章では、第1章で考案した外部電源を考慮した有限要素法を用いて単相誘導電動機の磁気特性解析を行い、磁束及び鉄損分布の詳細を明らかにするとともに、実験と比較した。

第4章では、三相誘導電動機の磁気特性測定のための静止モデルを製作し、磁気特性の詳細な実験的及び解析的検討を行った。その結果、鉄心各部のだ円回転磁束の振舞いや、鉄損がどこで多く発生しているか等の詳細が明らかになり、損失の少ない鉄心を設計するための有用な知見を得ることができた。

結論では、本研究で得られた成果を要約して示している。

# 目 次

緒 論 .....	1
第 1 章 外部電源を考慮した有限要素法及び寸法決定法を導入 した有限要素法による電気機器の磁気特性解析法 .....	4
1. 1 緒 言 .....	4
1. 2 逆問題の分類 .....	5
1. 3 外部電源を考慮した有限要素法 .....	8
1. 3. 1 概要と特長 .....	8
1. 3. 2 定式化 .....	11
1. 3. 3 本手法の有用性の検討 .....	15
1. 4 寸法決定法を導入した有限要素法 .....	19
1. 4. 1 概 要 .....	19
1. 4. 2 寸法修正要素 .....	21
1. 4. 3 定式化 .....	23
1. 4. 4 本手法の有用性の検討 .....	28
1. 5 結 言 .....	45
第 2 章 ギャップ，シールド等を有する電気機器の 新解析法 .....	46
2. 1 緒 言 .....	46
2. 2 ギャップ要素 .....	47
2. 2. 1 概要と特長 .....	47
2. 2. 2 定式化 .....	49
2. 2. 3 本要素の有用性の検討 .....	52

2.3	シールド要素 .....	56
2.3.1	概要 .....	56
2.3.2	定式化 .....	58
2.3.3	本要素の有用性の検討 .....	60
2.4	延長要素 .....	65
2.4.1	概要 .....	65
2.4.2	定式化 .....	67
2.4.3	本要素の有用性の検討 .....	69
2.5	結 言 .....	71
第3章	単相誘導電動機の磁気特性解析 .....	72
3.1	緒 言 .....	72
3.2	解析方法 .....	73
3.2.1	単相誘導電動機の新しい解析法 .....	73
3.2.2	座標軸の取り方についての検討 .....	81
3.3	解析及び検討 .....	82
3.3.1	解析モデルと解析条件 .....	82
3.3.2	磁束分布及び磁束密度波形 .....	84
3.3.3	鉄損分布 .....	93
3.3.4	電流波形 .....	95
3.4	実験的検討 .....	97
3.5	結 言 .....	97
第4章	三相誘導電動機の磁気特性解析と実験的検討 .....	99
4.1	緒 言 .....	99
4.2	解析及び検討 .....	100
4.2.1	解析モデルと解析方法 .....	100

4. 2. 2	磁束分布及び磁束密度波形 .....	103
4. 2. 3	鉄損分布 .....	110
4. 2. 4	電流波形 .....	112
4. 3	モデル誘導電動機による実験的検討 .....	112
4. 3. 1	回転時の磁気特性を静止状態で 模擬する方法の検討 .....	113
4. 3. 2	モデル誘導電動機 .....	114
4. 3. 3	測定結果と検討 .....	116
4. 4	結 言 .....	122
結 論	.....	123
謝 辞	.....	126
参考文献	.....	127
付 録	.....	133

## 緒 論

損失の少ない電気機器鉄心の設計を行うためには、その鉄心中のどこでどれだけの大きさの損失が発生しているか等のいわゆる鉄心のミクロな磁気特性について、詳細な検討を行っておく必要がある。しかるに解析的には、従来それに対する有力な解析法がないため、マクロな磁気特性解析が行われていただけである。また実験的には、静止器では、例えば中田氏<sup>(1)</sup>らによる変圧器鉄心の磁気特性のミクロな実験的検討、回転機では、Moses氏<sup>(2)</sup>らによる同期機鉄心の実験的検討が行われているが、実験により最適鉄心形状を見出すことは困難である。それゆえ、ミクロな観点に立った鉄心の最適設計法の考案が切望されている。

ところで、構造解析の分野で育った有限要素法が、近年、電気関係諸分野において、電磁界、熱流界等の新しい解析法として注目されている。有限要素法は対象とする領域を要素と呼ばれる任意形状の小領域に分割し、電流を与えてポアソン形の微分方程式を解き、ベクトルポテンシャルを求めて、これより磁束分布や端子電圧を計算する手法である。このように、領域を任意の形状の小領域に分割するため、領域の形状が複雑であってもよく、またミクロな磁束分布を得ることができるため、電気機器の新しい解析法として有限要素法が研究者、設計者の間で受け入れられ、この手法を用いて変圧器<sup>(3)</sup>、同期機<sup>(4)</sup>、直流機<sup>(5)</sup>等のミクロな解析を行い、最適設計が試みられている。しかるに、有限要素法を電気機器の設計に実用化するためには、その解析法が実際の電気機器に即している必要がある。ところが、以下に述べるように従来の有限要素法のままでは、電気機器の設計には適用できないのが実状であった。

すなわち，電気機器は通常外部の定電圧源に接続して運転されるため，与えられた端子電圧のもとでその特性計算を行う必要がある。ところが，従来の有限要素法では，前述のように電流を与えてベクトルポテンシャルを求め端子電圧を計算するので，まず電流を仮定する必要がある。そして，求めた端子電圧が所与の端子電圧と等しくなければ，それが一致するまで仮定した電流値を修正して反復計算する手法が一般にとられている。しかしながら，この手法では反復計算に多くの時間を要する。また，単相誘導電動機の主巻線電流と補助巻線電流のように，未知の電流が2個以上ある場合はこれらの組合せが非常に多くなるため，解析は不可能に近い。

また電気機器設計時には，特定部分の磁束分布が所与の条件を満足するように機器寸法を決定しなければならないことも多い。この場合には，機器寸法をそのつど変えた場合の分割図を作りながら，非常に多くの反復計算を行う必要がある。また，未知の寸法が2個以上ある場合は，前述の電流の場合と同様，解析は不可能に近い。

電気機器鉄心中のギャップや，電気機器のシールド等は機器の磁気特性に重大な影響を及ぼすが，これらの影響を有限要素法を用いて検討する場合，従来はへん平な要素で分割したり，細かく分割する方法がとられていたが，前者の場合は精度良い解析が行えないし，後者の場合はかなりの計算時間がかかる。また，ギャップやシールドの大きさや位置を変えた場合のシミュレーションは容易でない。

そこで本研究では，まず，有限要素法を実際の電気機器の設計に実用化するための手法として，(1)電気機器の励磁条件及び負荷条件の正確な考慮法，(2)所与の条件を満足する磁気回路の寸法の決定法，(3)電気機器中に存在するギャップ，シールド等の新しい取扱い法，を考案した。(1),(2)



の手法の開発により、従来正確な解析が不可能であった単相誘導電動機の解析や、磁束の空間的分布が所与の値になるような磁石寸法の決定等が可能になった。また(3)の手法を用いれば、ギャップ、シールド等の位置及び大きさを簡単に変更できるので、電気機器の最適寸法のシミュレーションを極めて容易に行える。

次に、新しく開発された(1)の手法を用いて単相及び三相誘導電動機の磁気特性解析を行い、磁束及び鉄損分布等の最適設計のための重要な知見を得た。また、精密測定のための静止モデルを作成し、実験的検討を行うとともに解析結果との照合及び考察を行った。

# 第1章 外部電源を考慮した有限要素法及び寸法決定法を導入した有限要素法による電気機器の磁気特性解析法

## 1.1 緒言

電気・電子機器は通常外部の定電圧源に接続して運転されるため、与えられた端子電圧のもとでその特性計算を行う必要がある。また機器設計時には、特定部分の磁束分布が所与の条件を満足するように電気機器の寸法を決定しなければならないことも多い。このような問題を、ここではいわゆる「逆問題」と呼ぶことにする。有限要素法を磁気回路設計に適用するためには、この逆問題の解析法を是非とも確立しておく必要がある。

所与の端子電圧のもとで特性計算を行う場合の逆問題を従来の有限要素法で解析する場合は、強制電流つまり磁化電流  $I_0$  を仮定し、これよりベクトルポテンシャル  $A$  を求め、それより端子電圧  $V$  を計算する。もし、解析結果が所与の端子電圧  $V_0$  になっていない場合には、 $I_0$  を修正して反復計算を行う必要がある。しかし、例えば三相変圧器のように、独立に与え得る磁化電流が多数ある場合には、仮定する電流  $I_{01}, I_{02}, \dots$  の組合せの数が非常に多くなり解析は不可能に近い。電気機器の寸法を決定する場合の逆問題では、機器寸法をそのつど変えた分割図を作りながら非常に多くの反復計算を行う必要がある。また、未知の寸法が2個以上ある場合の解析は不可能に近い。

そこで、解析手順から根本的な見直しを行い、従来の解析手順とは全く異なった新手法を開発した。本手法の開発により、従来有限要素法による解析が不可能であった単相誘導電動機の磁気特性解析や、磁束の空間的分布が所与の値になるような磁石の寸法を決定することが可能になった。

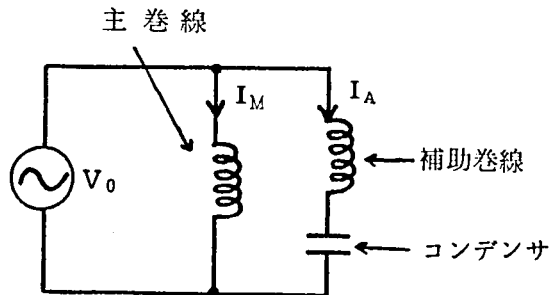
## 1.2 逆問題の分類

従来の有限要素法は，電気機器の寸法と電流を与えてベクトルポテンシャルを計算し，これより磁束分布や端子電圧を求めるものであった。ここでは，逆に端子電圧や磁束分布を与えて電流の大きさや電気機器の寸法を求める逆問題を，何を与えて何を求めるかという点に着目して三つのタイプに分類し，その問題点の考察を行う。ここでいう三つのタイプとは，端子電圧を与えて電流を求めるもの（タイプA），磁束分布を与えて電気機器の寸法を求めるもの（タイプB），最大電界強度あるいは損失が最小になるという条件を与えて電気機器の寸法を求めるもの（タイプC）である。

### (1) タイプAの逆問題

これは外部の定電圧源に接続して運転する場合の電気機器の磁気特性解析を行う問題である。この場合，電気機器の寸法は一定にしておき，外部電源の電圧を与えて電流及び磁束分布を求める。

タイプAの逆問題の例としては，例えば第1.1図に示すコンデンサモータを端子電圧  $V_0$  の電源に接続して運転する場合の磁気特性解析<sup>(14)</sup>や単相直巻電動機の整流解析<sup>(16)</sup>がある。第1.1図のコンデンサモータを従来の有限要素法を用いて解析するとすれば，主巻線電流  $I_M$  と補助巻線電流  $I_A$



第 1.1 図 コンデンサモータ

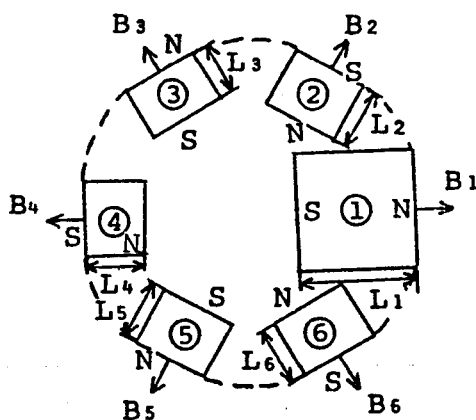
の二個が未知数となり、 $I_M$ と $I_A$ の組合せが非常に多くなるため、従来の方法では解析が困難である。

このタイプAの逆問題に対して考案した新手法を、「外部電源を考慮した有限要素法<sup>(6)</sup>」と呼ぶことにする。

## (2) タイプBの逆問題

これは特定部分の磁束分布が所与の条件を満足するように機器寸法を決定する問題である。この場合、磁性体の材質は指定しておいて、特定部分の磁束分布を与えて磁性体の寸法を求める。

タイプBの逆問題の例としては、例えば第1.2図に示すように、多数の永久磁石から構成されている電子複写機のマグネットロールの設計<sup>(15)</sup>がある。これは、ロール表面の磁束密度の法線方向成分 $B_1 \sim B_6$ が所与の値になるように、磁石1～6の寸法 $L_1 \sim L_6$ を決定するものであるが、従来は全く試行錯誤的に設計を行っていた。これを従来の有限要素法で解析する際は、最初適当に磁石寸法を仮定して解き、その結果が所与の磁束密度を満足していなければ、それが一致するまで、分割図を修正して反復計算しなければならない。このタイプの問題は分割



第 1.2 図 マグネットロール

図を変更しなければならないので、前述のタイプ A の逆問題以上に計算時間がかかる。

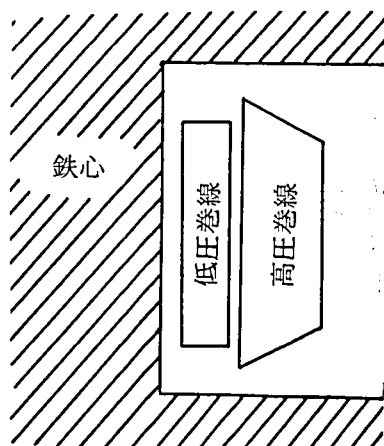
タイプ B の逆問題に対して考案した新手法を、「寸法決定法を導入した有限要素法<sup>(6)</sup>」と呼ぶことにする。

### (3) タイプ C の逆問題

これは電気機器の最大電界強度あるいは損失が最小になるというような条件を与えて、これを満足する電気機器の最適寸法を決定する問題である。

タイプ C の逆問題の例としては、例えば第 1.3 図の変圧器巻線において、巻線の総断面積を一定にし、最大電界強度が最小になるような巻線形状の設計がある。このような問題を従来の有限要素法を用いて解くためには、分割図の修正を行いながらかなりの反復計算を必要とする。

本論文では、タイプ A 及びタイプ B の逆問題に対する新手法を述べる。



第 1.3 図 変圧器巻線

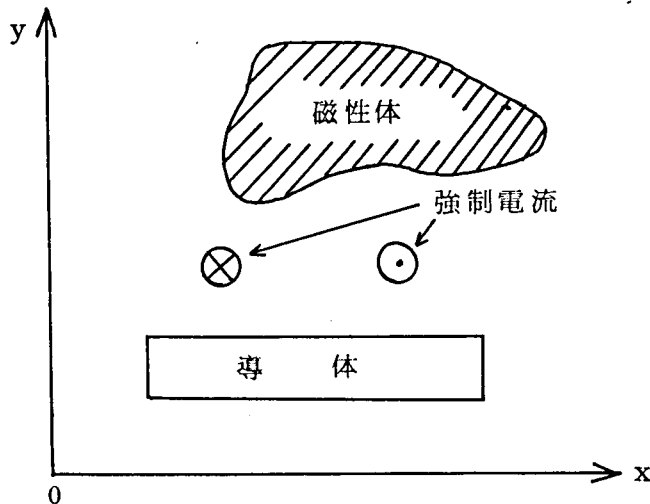
### 1.3 外部電源を考慮した有限要素法

#### 1.3.1 概要と特長

ここでは、前述のタイプAの逆問題に対して考案された新手法について述べる。

第1.4図のように、解析領域中に強制電流（外部電源から流入する電流）、導体及び磁性体が存在する領域を考える。この導体及び磁性体が $z$ 方向に無限に長いと仮定できる場合は、 $x, y$ 平面上の磁束分布が $z$ 方向に一様になる。このように $z$ 方向に一様な電磁界を二次元電磁界と呼ぶことにするが、本論文では以後すべてこの場合を取扱う。導体中に渦電流が流れている場合の二次元電磁界の基礎方程式は次式となる（式の誘導は付録第1章参照）。<sup>(7),(8)</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nu_y \frac{\partial A}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu_x \frac{\partial A}{\partial y}) = -J_0 + J_e \quad (1.1)$$



第1.4図 解析領域



ここで、 $A$ はベクトルポテンシャル  $A$  の  $z$  方向成分、 $\nu_x, \nu_y$ は磁気抵抗率の  $x$  及び  $y$  方向成分、 $J_0$ は外部電源から流入する電流の密度つまり強制電流密度  $J_0$  の  $z$  方向成分、 $J_e$ は渦電流密度  $J_e$  の  $z$  方向成分である。このように、簡単のため、以後ベクトル量の  $z$  方向成分の添字  $z$  は省略する。

( 1.1 ) 式に対する、有限要素法のいわゆる全体節点方程式は次式となる(式の誘導の詳細は付録第 2 章参照)<sup>(7)</sup>

$$\begin{bmatrix} H_{1,1} & \cdots & H_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{n,1} & \cdots & H_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{01} \\ \vdots \\ I_{0k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} \quad ( 1.2 )$$

ここで、 $[H]$ はいわゆる全体第 2 係数マトリクス、 $[C]$ は強制電流  $\{I_0\}$ の係数マトリクス、 $\{Q\}$ は既知のポテンシャル等の関数である。また  $n$ は未知節点数、 $k$ は強制電流  $I_0$ の個数である。

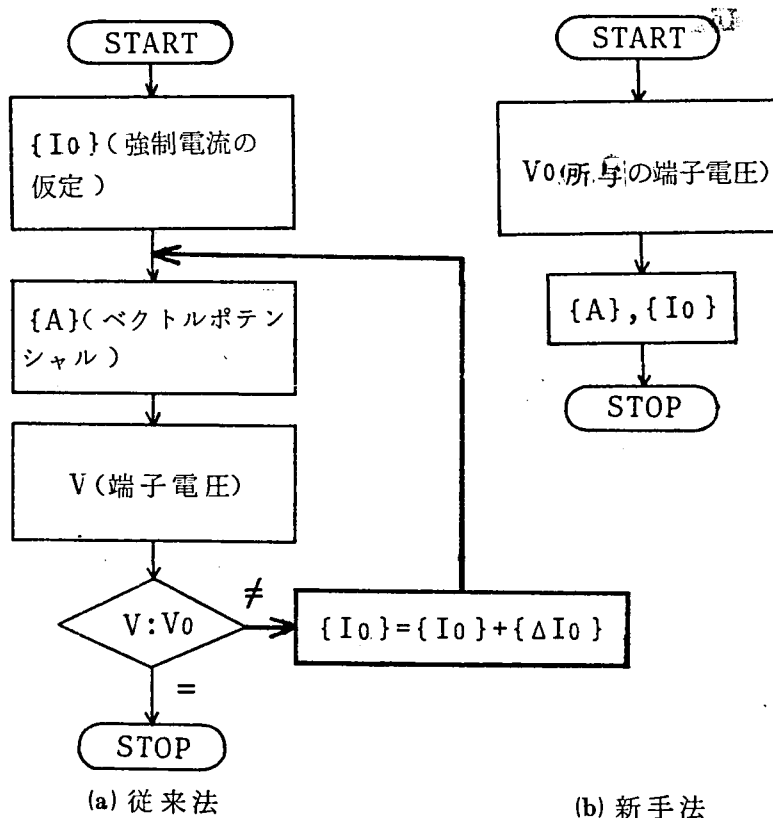
( 1.2 ) 式は、ベクトルポテンシャル  $\{A\}$ 、強制電流  $\{I_0\}$ 、物体の境界節点の座標  $\{x\}$ 、 $\{y\}$ の間の関係式を示しており、これを一般形で書けば次式となる。

$$f_i(\{x\}, \{y\}, \{A\}, \{I_0\}) = 0 \quad (i=1, \cdots, m) \quad ( 1.3 )$$

従来の有限要素法では、寸法(座標  $\{x\}$ 、 $\{y\}$ )は固定しておき、強制電流  $\{I_0\}$ を与えて、それからベクトルポテンシャル  $\{A\}$ を求めている。端子電圧  $V_0$ は、このベクトルポテンシャルから計算される。そ

の計算手順を第 1.5 図(a)に示す。端子電圧が $V_0$ になるために必要な強制電流 $I_0$ を計算するためには、図に太線で示すような反復計算がかなり必要である。

ところが、( 1.3 ) 式において、 $\{A\}$ のみを未知数とする必要はなく、この連立方程式の数 $m$ が $m > n$ であれば、 $\{I_0\}$ の一部も未知数として取扱ってよい。そこでこの点に着目し、 $\{I_0\}$ も未知数として、従来の解析手順とは全く異なった新しい解析法を考案した。その解析手順は、第 1.5 図(b)に示すように従来法とは全く逆であり、強制電流を直接求めることができる。それゆえ、本手法は次のような特長を有する。



第 1.5 図 計算手順

- (a) 強制電流を直接求めることができる。
- (b) 繰返し計算を必要としないので，計算時間を大幅に短縮できる。

### 1. 3. 2 定式化

ここでは，強制電流  $\{I_0\}$  を未知数とする新しい解析法の定式化について述べる。

#### (1) 全体節点方程式

( 1. 2 ) 式において  $\{I_0\}$  も未知数であるとし，  $\{I_0\}$  の項を左辺に移項すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} H_{1,1} & \cdots & H_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{n,1} & \cdots & H_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ I_{01} \\ \vdots \\ I_{0k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} \quad ( 1. 4 )$$

ところで，方程式を解く際，未知数の数と方程式の数は等しくなければならない。しかるに，( 1. 4 ) 式の方程式の数は未知節点数の個数  $n$  であるのに対し，未知数の数は  $n + k$  となり，  $\{I_0\}$  の個数  $k$  だけ多いので，このままでは  $\{A\}$  と  $\{I_0\}$  が求まらない。そこで，次に述べるようなベクトルポテンシャル，電流及び端子電圧間の関係式を導入する必要がある。

#### (2) ベクトルポテンシャル，電流及び端子電圧間の関係式

一般の電気機器では，有限要素法で解析される領域内の巻線（例えば，固定子巻線）は，解析領域外にある電源及び抵抗，インダクタンス，コンデンサ等の外部負荷に接続されるのが通例である。

第 1.6 図に回転機の固定子巻線の例を，第 1.7 図にその等価回路を示す。ここで，第 1.7 図において破線で囲んだ有限要素適用領域は，第 1.6 図の端部を除いた鉄心内の領域を示す。 $V_0$ は外部電源電圧， $R_0$ は巻線端部の抵抗， $L_0$ は巻線端部の漏れインダクタンスであり，これは第 1.6 図の $\Phi_{le}$ に対応する。また， $R_c$ は有限要素適用領域内の巻線の抵抗である。この場合，有限要素適用領域内のベクトルポテンシャル  $A$ ，外部電源電圧  $V_0$ ，外部抵抗  $R_0$ ，インダクタンス  $L_0$ 間には，キルヒホッフの第 2 法則で結ばれる次式のような関係式がある。

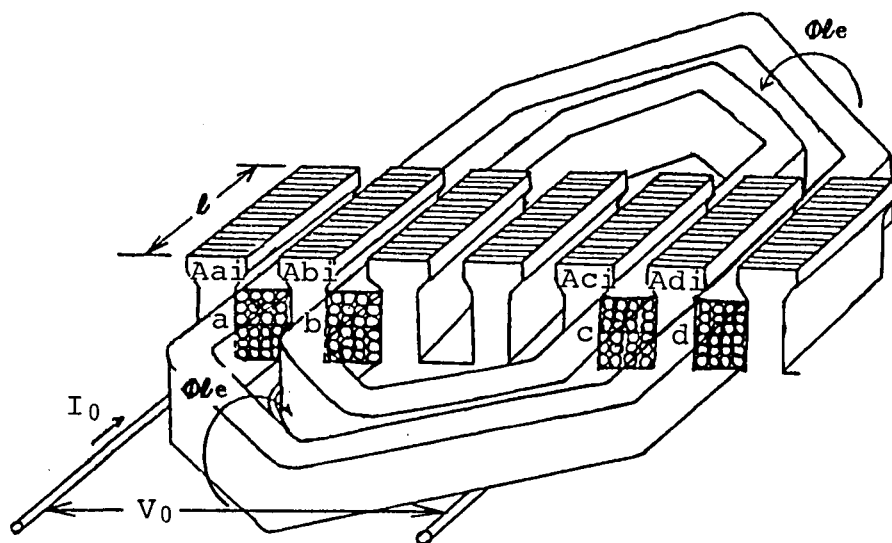
$$\frac{d}{dt} \int_{C_f} A ds + (R_c + R_0) I_0 + L_0 \frac{dI_0}{dt} = V_0 \quad (1.5)$$

ここで， $C_f$ は有限要素適用領域中の巻線に沿った積分路， $s$ は単位接線ベクトルである。

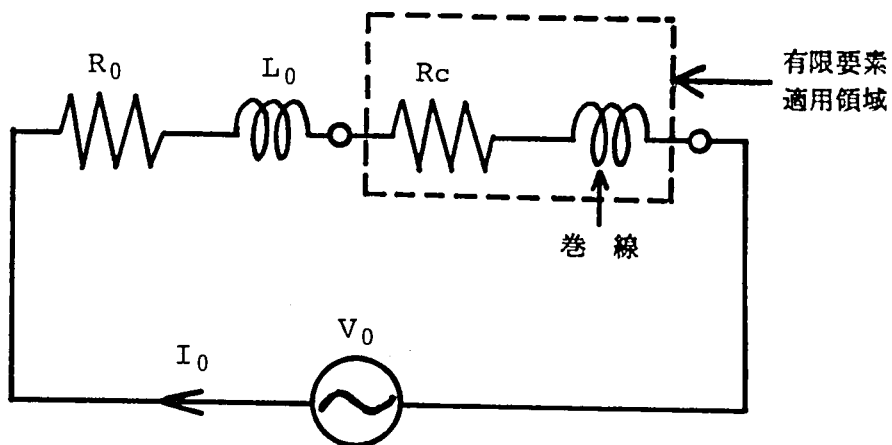
第 1.6 図の場合について，(1.5)式の左辺第 1 項のみを計算する。各スロット中の導体数は  $n_s$  とし，これらは他のスロット中の導体と直列に接続されているものとする。また，簡単のために各導体  $a \sim d$  の断面は非常に小さく，各導体のベクトルポテンシャルは一定であると仮定すれば，(1.5)式の左辺第 1 項は次式となる。

$$\frac{d}{dt} \int_{C_f} A ds = \ell \sum_{i=1}^{n_s} \frac{d}{dt} \{ (A_{ai} - A_{di}) + (A_{bi} - A_{ci}) \} \quad (1.6)$$

ここで， $\ell$ は第 1.6 図に示したように，鉄心の積厚である。また，下付添字  $a, b, c, d$  はスロット番号を示し，例えば， $A_{ci}$  は  $C$  番目のスロット中の  $i$  番目の導体のベクトルポテンシャルを示す。以上，閉回路が 1 個だけの場合の関係式を導出したが，第 1.1 図のコンデンサモータでは，閉回路が 2 個あるため，上述したような関係



第 1.6 図 固定子巻線



第 1.7 図 等価回路

式が 2 個得られる。独立な電流の数は閉回路の数に対応するため、独立な電流が  $k$  個ある場合は、( 1.5 ) 式のような関係式を  $k$  個得ることができる。これらの関係式をマトリクスで書けば次式となる ( 付録第 2 章参照 )。

$$\begin{bmatrix} F_{1,1} & \cdots & F_{1,(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ F_{k,1} & \cdots & F_{k,(n+k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ I_{01} \\ \vdots \\ I_{0k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{01} \\ \vdots \\ V_{0k} \end{bmatrix} \quad ( 1.7 )$$

ここで、 $\{F\}$  は付録第 2 章に示したような  $\{A\}$ 、 $\{I_0\}$  の係数で、 $\{V_0\}$  は端子電圧に対応する列ベクトルである。

### (3) 逆問題を解くための方程式

( 1.7 ) 式を、 $n$  個の方程式から成る ( 1.4 ) 式の全体節点方程式と連立させると、次式のように方程式の総数  $n + k$  が未知数の数と等しくなるので、 $\{A\}$ 、 $\{I_0\}$  を次式より直接求めることができる。

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{1,1} & \cdots & H_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{n,1} & \cdots & H_{n,n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,k} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} F_{1,1} & \cdots & F_{1,(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ F_{k,1} & \cdots & F_{k,(n+k)} \end{bmatrix} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ I_{01} \\ \vdots \\ I_{0k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \\ V_{01} \\ \vdots \\ V_{0k} \end{bmatrix} \quad ( 1.8 )$$

上式は非対称マトリクスとなるが、付録第 3 章で述べるようにへりつきバンドマトリクスとして取扱えば、容易に解くことができる。



### 1. 3. 3 本手法の有用性の検討

本手法を単相誘導電動機の磁気特性解析に適用した際の有用性については、第 3 章で詳述するが、本手法はそれ以外にも、直流電圧を印加した場合の鉄板中への磁束の浸透<sup>(17)</sup>のような過渡現象解析や、未知の電流が多数ある三相変圧器の磁化電流解析<sup>(18)</sup>、単相直巻電動機の整流解析<sup>(19)</sup>等にも威力を発揮する。ここでは、三相変圧器の磁化電流解析、単相直巻電動機の整流解析を例にとって、その有用性を述べる。

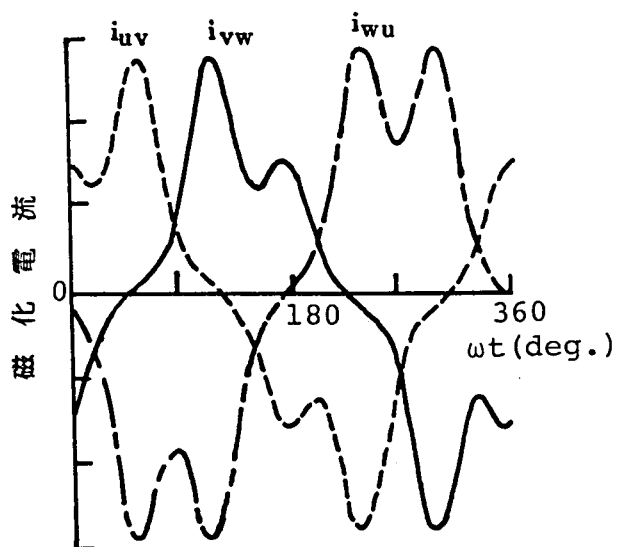
#### (1) 三相変圧器の磁化電流解析

三相変圧器の励磁巻線が鉄心脚中央部に集中巻されていると仮定した場合の磁化電流波形の解析を行った。鉄心の材質は無方向性けい素鋼板 S-10 で、脚の平均磁束密度は 1.4 (T) とした。

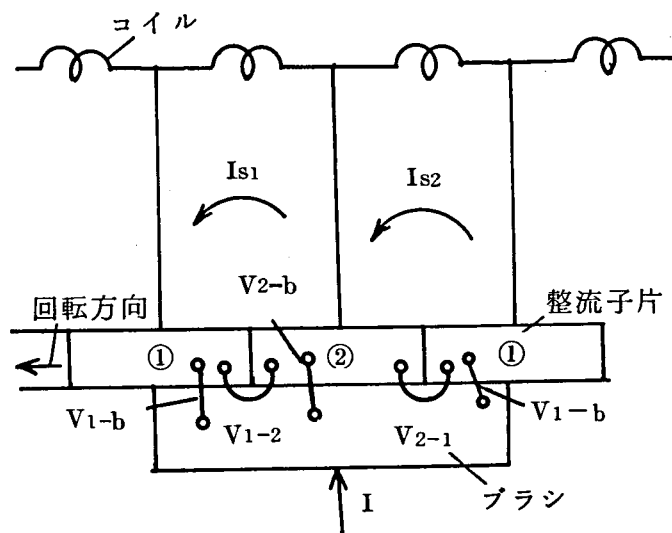
第 1.8 図に  $\Delta$  結線を行ったときの磁化電流波形  $i_{uv}$ ,  $i_{vw}$ ,  $i_{wu}$  を示す。従来のような電流密度を仮定する手法では、電流の組合せが多くなりすぎ解析は不可能に近いが、本手法を用いればわずかの計算時間で解析が可能である。

#### (2) 単相直巻電動機の整流解析

第 1.9 図に、単相直巻電動機の整流回路の一例を示す。これは 1 スロットに対し整流子片が 2 個で、ブラシ被覆数が 2 の場合である。それゆえ、この場合は 2 種類の整流電流  $I_{s1}$ ,  $I_{s2}$  と負荷電流  $I$  が未知数となる。ところで、単相直巻電動機は、電磁界の支配方程式であるポアソンの方程式、電気特性を表す電圧方程式及び整流方程式を満足して運転されている。そこで、上記の 3 方程式を同時に解くことができれば、より詳細な解析が可能であるが、従来はこれらが個々に検討されていた。しかるに、第 1.9 図の整流回路において整流方程式を作り、



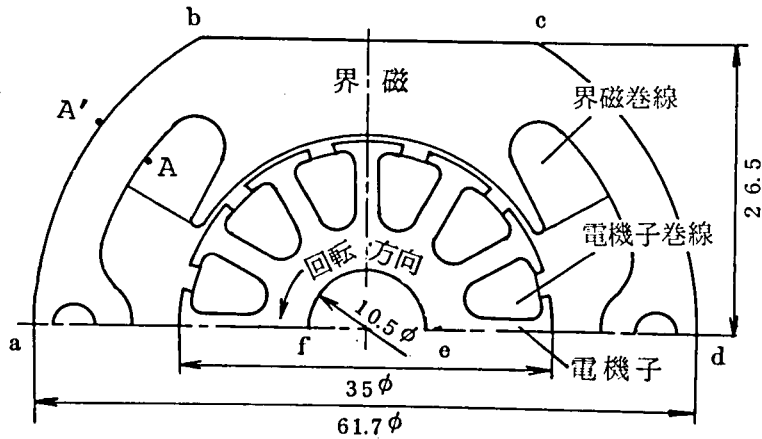
第 1. 8 図 磁化電流波形



第 1. 9 図 整流回路

また、1.3.2.の(2)で述べたようなベクトルポテンシャル、電流及び端子電圧間の関係式、つまり電圧方程式を作って、外部電源を考慮した有限要素法を用いれば、上記の解析が可能である。

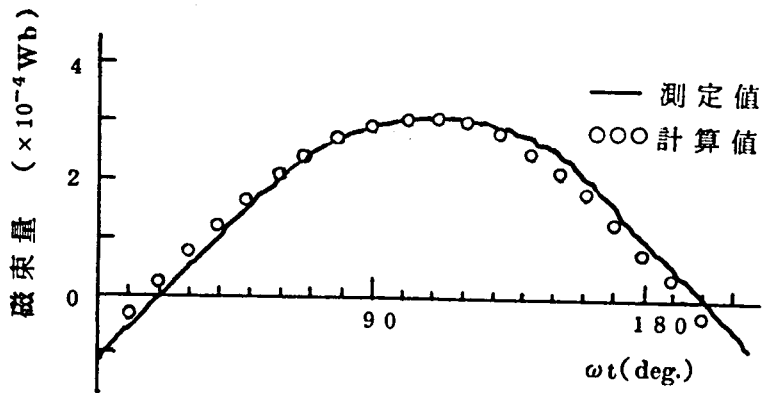
第1.10図に解析モデルの概略図を示す。鉄心の材質は無方向性けい素鋼板S-60であり、電動機の回転数は15,000(rpm)とした。



第1.10図 解析モデル

界磁鉄心外周面 a-b-c-d と電機子鉄心内周面 e-f には固定境界条件<sup>(7)</sup>を、a-f, d-e には周期境界条件<sup>(7)</sup>を与えた。

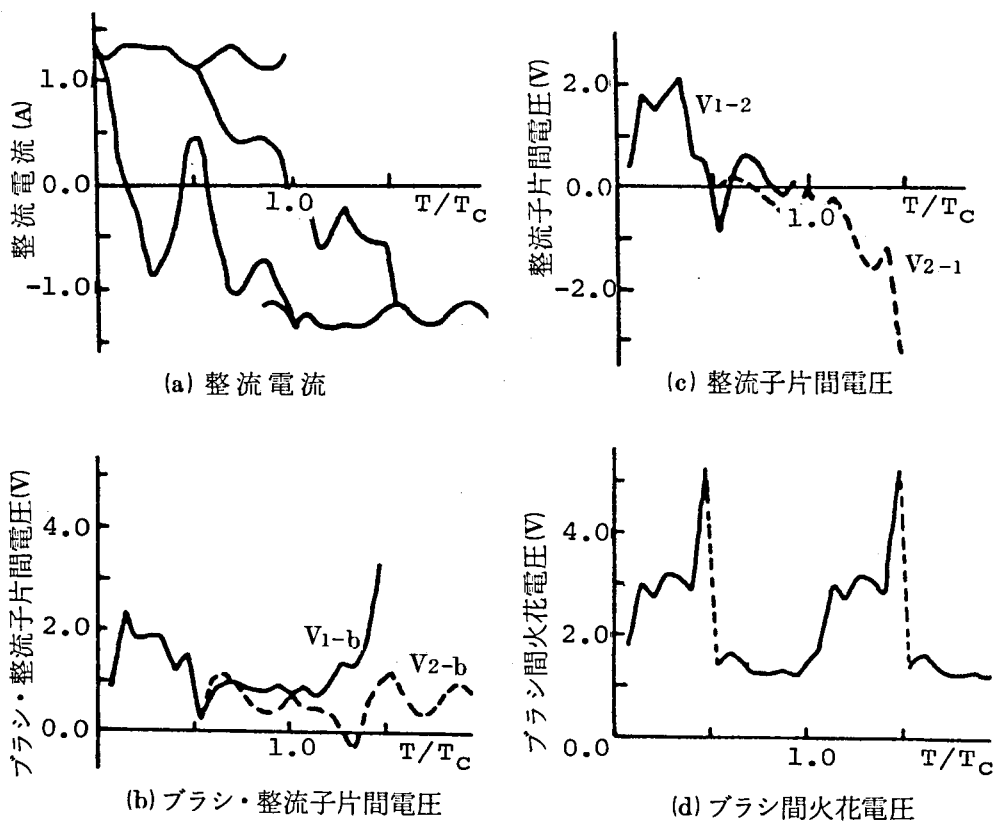
第1.11図に、交流100(V)を印加した場合の第1.10図のA-A'間



第1.11図 磁束波形

の磁束波形を示す。○印は計算値を，実線は測定値を示す。これより，磁束波形の計算値と測定値は比較的良く一致していることがわかる。

第 1.12 図に，整流電流，ブラシ・整流子片間電圧，整流子片間電圧，ブラシ間の火花電圧の計算結果を示す。横軸は整流時間  $T$  を整流周期  $T_c$  で正規化している。(b) 及び (c) 図のブラシ・整流子片間電圧  $V_{1-b}$ ,  $V_{2-b}$  及び整流子片間電圧  $V_{1-2}$ ,  $V_{2-1}$  は，第 1.9 図に示したとおりである。なお，整流コイルの切換わる付近を本解析では考慮できないので，(d) 図ではその部分を破線で結んだ。



第 1.12 図 電圧及び電流波形の解析結果

整流電流や火花電圧の波形が定量的にわかるので、鉄心形状やブラシずらし角、ブラシ接触抵抗等が整流特性に及ぼす影響の検討を行うことができる。<sup>(10)</sup>

## 1.4 寸法決定法を導入した有限要素法

### 1.4.1 概 要

ここでは、前述のタイプBの逆問題を、従来のような反復計算を行わずに解析する方法を考える。有限要素法の係数マトリクスの各要素は、座標  $x, y$  の高次関数となるので、もし、物体の寸法、つまりその座標  $x, y$  を未知数として解く場合は、高次の非線形方程式となるため、解析は容易でない。そこで、「寸法修正要素」なるものを導入する。これにより、有限要素法の式は線形方程式となり、しかも物体の寸法を未知数として取扱うことができる。以下に、永久磁石の寸法を決定する問題を例にとって新解析法を説明する。

従来の有限要素法を用いて解析を行う場合は、まず、磁石の寸法  $\{L_0\}$  を仮定し、第 1.13 図(a)のように、得られた磁束密度  $\{B\}$  が所与の値  $\{B_0\}$  に等しいかどうか判定し、等しくなければ図に太線で示したように、磁石寸法の修正及びそれに伴う分割図の変更を行い、所望の磁束密度  $\{B_0\}$  が得られるまで相当の反復を行わねばならない。寸法が未知の磁石が 1 個の場合は、ある程度の反復計算を行うことにより解析が可能であるが、1.3 節の場合と同様に、磁石が 2 個以上になると解析はほとんど不可能である。

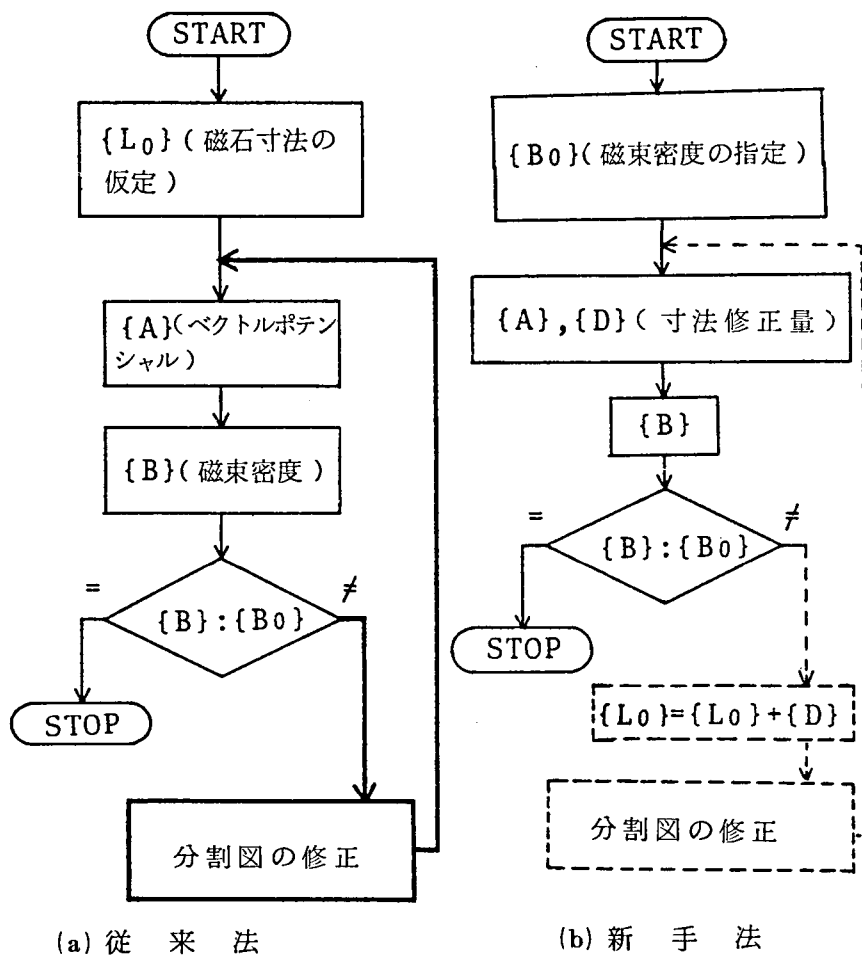
もし、仮定した磁石寸法  $\{L_0\}$  に対する寸法修正量が直ちにわかれば、これらの反復は不要である。今回考案した寸法決定法を導入した有限要素法を用いれば、第 1.13 図(b)に示すように磁石寸法の修正量  $\{D\}$  を

直ちに求めることができる。必要な磁石寸法  $\{L\}$  は次式で計算される。

$$\{L\} = \{L_0\} + \{D\} \quad (1.9)$$

もし、1回の計算で必要な磁石寸法が求まらない場合は、破線で示すような分割図の修正を行い、再計算を行えばよいが、1.4.4で述べるようにこれはせいぜい数回繰返すだけでよい。

後述するように、本解析法は、前節で述べた未知数を直接求める外部電源を考慮した有限要素法と、次章で述べるギャップ要素<sup>(10)</sup>関連の、



第 1.13 図 計算手順

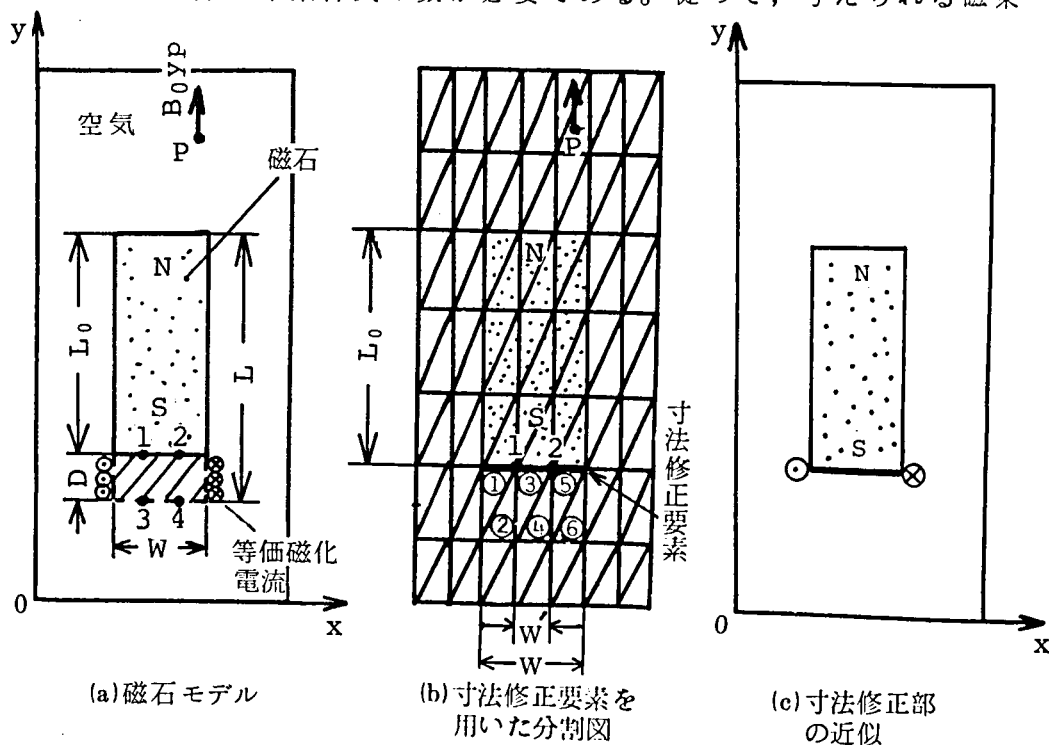


面積は持たないがエネルギーを有する要素という考えを結合することによって、分割図はそのままにしておいて寸法修正量を直接求めようとする手法である。

#### 1. 4. 2 寸法修正要素

寸法修正要素とは、磁性体の寸法修正量分だけのエネルギーを有する線要素である。これを用いるということは、実際は分布して存在する磁性体のエネルギーを一箇所に集中させて取扱うことに相当する。

ここでは、第 1.14 図(a)に示す磁石を例にとって寸法修正要素の説明を行う。簡単のため、磁石の幅  $W$  は与えられているものとする。図で  $L_0$  及び  $L$  は磁石寸法の推定値及び本手法を適用した結果求めた磁石寸法である。寸法修正量  $D$  は未知である。本手法では、磁石寸法の修正量  $\{D\}$  を新たに未知数として取扱おうというわけであるから、未知数が増えた分だけ条件式の数が必要である。従って、与えられる磁束



第 1.14 図 寸法修正要素の説明図

密度  $\{B_0\}$  の数は、未知量  $\{D\}$  の数に等しくなければならない。本例では、 $\{D\}$  の数は 1 個だけなので、磁束密度が指定される点は P 点のみで、しかも一方向、すなわち  $y$  方向成分  $B_{0yp}$  のみが指定されているものとする。

第 1.14 図(a)の斜線部が磁石の寸法修正部であるが、この部分の磁石の磁化は図中に  $\otimes$ ,  $\odot$  で示したような分布した等価磁化電流によって表される。指定した点 P の磁束密度が  $B_{0yp}$  になるような各々の等価磁化電流の大きさと、その座標つまり寸法修正部の長さ  $D$  を求めたいわけであるが、このままでは各々の等価磁化電流の大きさとその座標の両方が未知数となるため、取扱いが非常に複雑になる。

もし、寸法修正量  $D$  が小さければ、(a)図に斜線で示す部分の磁束分布は  $y$  方向にほとんど一定であるので、(a)図の節点 1 ~ 4 のポテンシャル  $A_1 \sim A_4$  の間には、次式の関係が成立つと仮定できる。

$$A_1 = A_3, \quad A_2 = A_4 \quad (1.10)$$

それゆえ、このような場合には、(a)図の斜線部内の磁石のエネルギー分布が  $y$  方向に一樣であると仮定して、(a)図の節点 3, 4 を(b)図のように節点 1, 2 に移動させてもよい。また、我々が求めたいのは P 点の磁束密度が  $B_{0yp}$  になるような磁石寸法であり、斜線部内の磁束分布は必要ないので、この部分を要素分割しなくてもよい。

このことは、等価磁化電流が(c)図のように集中して流れていると考えることに相当する。このようにすれば、後述のように、(a)図の斜線部の磁石のエネルギーを、それと等価なエネルギーを有する磁石の長さ  $D$  と磁石の磁化  $M$  のみで、表現することができる。

第 1.14 図(b)の太線のように、エネルギーが集約された線要素が寸法

修正要素である。これは，エネルギーは有しているが，面積を持たない要素である。

第 1.14 図(a)の斜線部の永久磁石の有するエネルギー $\chi_m$ は，磁石の磁化を等価磁化電流で表した場合，次式となる。

$$\chi_m = \frac{1}{2} \nu_0 \iint_{S_m} \left\{ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \iint_{S_m} \left( \int_0^A J_m dA \right) dx dy \quad (1.11)$$

ここで， $S_m$ は寸法修正部の領域， $\nu_0$ は空気の磁気抵抗率， $J_m$ は等価磁化電流密度<sup>(7), (8), (11)</sup>である。上式の右辺第一項は空気の有するエネルギー，第二項は等価磁化電流によるエネルギーである。第 1.14 図(b)の分割図においては，(1.11)式の右辺第一項のエネルギーは空気中の要素①～⑥に含まれているので，(b)図の太線の寸法修正要素には，(1.11)式の右辺第二項の等価磁化電流によるエネルギーを持たせるだけでよい。すなわち，寸法修正要素 e の有するエネルギー $\chi_m^{(e)}$ は次式となる。

$$\chi_m^{(e)} = - \iint_{S_m^{(e)}} \left( \int_0^A J_m dA \right) dx dy \quad (1.12)$$

ここで， $S_m^{(e)}$ は寸法修正要素 e にエネルギーを持たせる寸法修正部の領域であり，例えば(b)図の節点 1, 2 を有する寸法修正要素 1-2 の場合には，(a)図の 1-3-4-2-1 の領域に対応する。

#### 1.4.3 定式化

##### (1) 全体節点方程式

磁石の磁化  $M$  の  $x, y$  方向成分を  $M_x, M_y$  とすれば，等価磁化電流密度  $J_m$  は次式で与えられる。<sup>(12)</sup>

$$J_m = \nu_0 \left( \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \quad (1.13)$$

(1.12) 式に (1.13) 式を代入して，グリーンの定理を適用すると次

式が得られる。

$$\chi_m^{(e)} = -\nu_0 \left\{ M_x \int_C \left( \int_0^A dA \right) dx + M_y \int_C \left( \int_0^A dA \right) dy \right\} \quad (1.14)$$

ここで、 $C$ は領域  $S_m^{(e)}$  の境界である。上式を節点  $i$  のベクトルポテンシャル  $A_i$  で偏微分すれば、

$$\frac{\partial \chi_m^{(e)}}{\partial A_i} = -\nu_0 \left( M_x \int_C \frac{\partial A}{\partial A_i} dx + M_y \int_C \frac{\partial A}{\partial A_i} dy \right) \quad (1.15)$$

寸法修正要素内では、ベクトルポテンシャル  $A$  は  $x$  方向に座標  $x$  の一次関数で変化し、 $y$  方向には (1.10) 式のように一定であることに注意すれば、上式は次式となる。

$$\frac{\partial \chi_m^{(e)}}{\partial A_i} = -\nu_0 \left( M_x \frac{W'}{2} + M_y D \right) \quad (1.16)$$

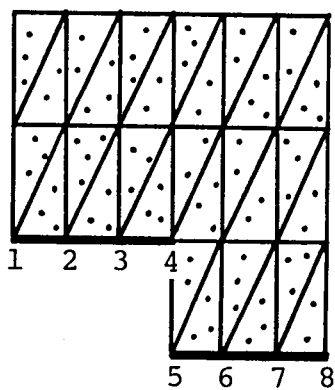
ここで、 $W'$  は第 1.14 図(b)に示したような、寸法修正要素の幅である。

もし、 $M_x$ 、 $M_y$  と  $D$  がともに未知数である場合は、上式は非線形方程式となるため、計算は容易でない。そこで、寸法修正部の磁化  $M_x$ 、 $M_y$  がそれに隣接する磁石の磁化に等しいと仮定して、上式を線形方程式として取扱う。

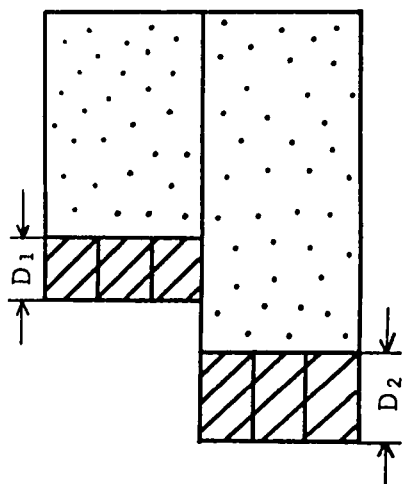
寸法修正要素を適用する領域以外の全領域のエネルギーを  $A_i$  で偏微分したものを上式に加えて、それを零とおき、 $\{A\}$  と  $\{D\}$  を未知数として取扱えば、(1.4) 式に対応した次式のような全体節点方程式が得られる (式の導出の詳細は付録第 4 章参照)。

$$\left[ \begin{array}{ccc} H_{1,1} & \cdots & H_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{n,1} & \cdots & H_{n,n} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} C_{1,1}^* & \cdots & C_{1,r}^* \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1}^* & \cdots & C_{n,r}^* \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ D_1 \\ \vdots \\ D_r \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{array} \right] \quad (1.17)$$

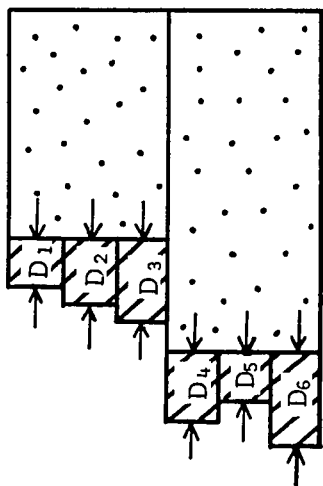
ここで、 $[O^*]$  は寸法修正量  $\{D\}$  に関係した定数マトリクスである。  
 $r$  は寸法修正要素のグループ数であり、 $D$  が同一寸法になる寸法修正要素を1グループとする。例えば、第 1.15 図(a)の二個の磁石の寸法を寸法修正要素 1-2, 2-3, 3-4, 5-6, 6-7, 7-8 を用いて決定する際、(b)図のように磁極を平行移動させて伸縮させるためには、3 個の寸



(a) 寸法修正する前の磁石



(b) 磁極表面を平坦に伸ばした場合



(c) 磁極表面に凹凸をつけて伸ばした場合

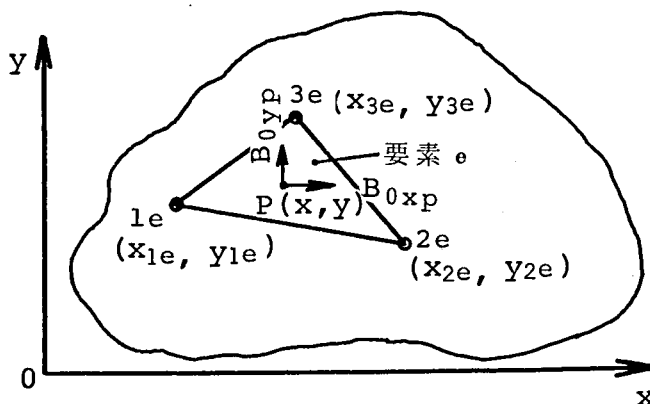
第 1.15 図 磁石寸法の修正

法修正要素の修正量をともに等しくする必要があり、1-2, 2-3, 3-4 の修正量を1グループにまとめて $D_1$ 、また5-6, 6-7, 7-8 の修正量を $D_2$ として取扱う必要がある。すなわち、この場合の $D$ の個数は2、つまり $r=2$ となる。また(c)図のように、磁石の表面に凹凸をつけてもよい場合は、各寸法修正要素の修正量 $D_1 \sim D_6$ を独立な未知変数として取扱う必要がある、この場合は $r=6$ となる。

未知数の数は方程式の数よりも多いので、(1.4)式の場合と同様、(1.17)式のままでは解けない。そこで、次に述べるようなベクトルポテンシャルと磁束密度間の関係式の導入が必要となる。

## (2) ベクトルポテンシャル、磁束密度間の関係式

簡単のため、要素として第1.16図のように3節点を有し、かつその要素内のポテンシャルが座標 $x, y$ の一次式で近似される要素（これを一次三角形要素と呼ぶことにする）を用いることにし、図のように、解析領域中のある点 $P$ の磁束密度の $x, y$ 方向成分 $B_{0xp}, B_{0yp}$ が与えられた場合の関係式について述べる。なお、本論文では以後、すべてこの一次三角形要素を用いることにする。ところで、通常の



第 1.16 図 一次三角形要素

節点番号は、全節点に 1 番から順番に付けられるいわゆる絶対番号であるが、図中の 1e, 2e, 3e は、特定の要素 e を取出して議論する際に便利のように相対的に付けられた仮の番号である。

一次三角形要素 e では、節点 1e, 2e, 3e のベクトルポテンシャル  $\Lambda_{1e}, \Lambda_{2e}, \Lambda_{3e}$  と要素 e 内の磁束密度  $B_{oxp}, B_{oyp}$  の間には次式の関係がある。(7)

$$\left. \begin{aligned} B_{oxp} &= \sum_{j=1}^3 d_{je} \Lambda_{je} / 2\Delta \\ B_{oyp} &= - \sum_{j=1}^3 c_{je} \Lambda_{je} / 2\Delta \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

ここで、 $\Delta$  は要素 e の面積を示す。また、 $c_{je}, d_{je}$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} c_{je} &= y_{ke} - y_{le} \\ d_{je} &= x_{le} - x_{ke} \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

ただし、je, ke, le は循環する添字で、例えば、je = 2 のとき、ke = 3, le = 1 を表すものとする。

(1.18) 式は、P 点を含む要素内の磁束密度の x 及び y 方向成分  $B_{oxp}, B_{oyp}$  と三角形の頂点のベクトルポテンシャル  $\Lambda_{1e}, \Lambda_{2e}, \Lambda_{3e}$  の関係を示しているが、一般に、r 個の磁束密度成分  $B_{01}, \dots, B_{0r}$  と、それらが指定された要素を構成する節点のベクトルポテンシャル  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  との間関係式は次式のようなになる(詳細は付録第 4 章参照)。

$$\begin{bmatrix} F_{1,1}^* & \dots & F_{1,(n+r)}^* \\ \vdots & & \vdots \\ F_{r,1}^* & \dots & F_{r,(n+r)}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_n \\ D_1 \\ \vdots \\ D_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{01} \\ \vdots \\ B_{0r} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

ここで、 $\{F^*\}$  は  $\{A\}$ 、 $\{D\}$  の係数である。(1.18)式は、ベクトルポテンシャル  $\{A\}$  と磁束密度  $\{B_0\}$  だけの間の関係式であるのに、(1.20)式で  $\{D\}$  も導入して記述したのは、後で(1.17)式と連立させてマトリクス形式で書く際の便宜上のものである。それゆえ、 $\{D\}$  に対応する  $\{F^*\}$  の成分、 $F_{i,(n+1)}^*, \dots, F_{i,(n+r)}^*$  はすべて零である。

### (3) 逆問題を解くための方程式

(1.17)式と(1.20)式を連立させると、外部電源を考慮した有限要素法の場合の(1.8)式に対応した次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{1,1} & \dots & H_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{n,1} & \dots & H_{n,n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{1,1}^* & \dots & C_{1,r}^* \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1}^* & \dots & C_{n,r}^* \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} F_{1,1}^* & \dots & F_{1,(n+r)}^* \\ \vdots & & \vdots \\ F_{r,1}^* & \dots & F_{r,(n+r)}^* \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ D_1 \\ \vdots \\ D_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \\ B_{01} \\ \vdots \\ B_{0r} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

もし、求まった  $D$  が負の場合は磁石を短くすることに、 $D$  が正の場合は長くすることに対応する。

なお、本論文では磁石の長さを未知数とした場合についてのみ述べたが、磁石の幅を未知数とすることも考えられ、これは今後の検討課題である。

#### 1.4.4 本手法の有用性の検討

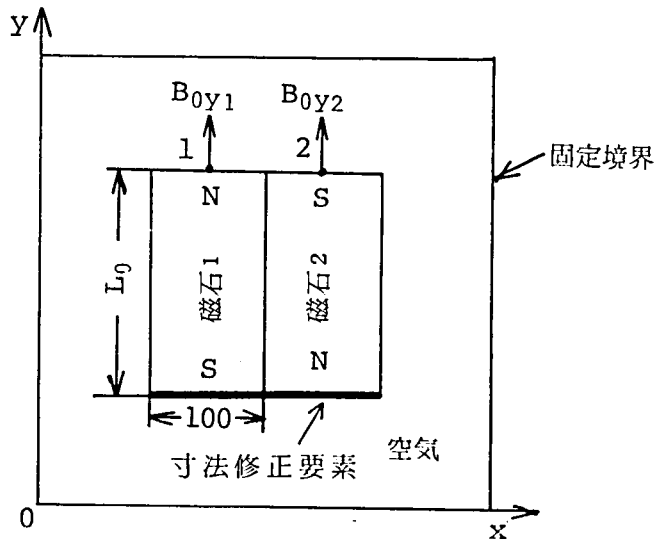
ここでは、寸法修正要素がどのように磁石の長短を表現するかを



明らかにするとともに、本手法の誤差及び実機に適用した際の本手法の有用性の検討、ならびに実験的検討を行う。

#### (1) 磁石の長短の表現

第 1.17 図のように、二個の磁石の極性を互いに反対方向に配置した磁気回路を考える。磁石は異方性磁石で、磁化  $M$  はいずれも  $1.0$  ( $\text{Wb}/\text{m}^2$ ) 一定とする。磁石長  $L_0$  をいずれも  $200$  ( $\text{mm}$ ) とし、太線で示す位置に寸法修正要素を適用し、磁石表面の磁束密度の  $y$  方向成分  $B_{0y1}$ ,  $B_{0y2}$  の比  $|B_{0y1}/B_{0y2}|$  を  $0.893$  一定にして、(a) 2 個の磁石がともに短くなった場合 ( $B_{0y1} = 0.447$ ,  $B_{0y2} = -0.500$  (T)), (b) 両方がともに長くなった場合 ( $B_{0y1} = 0.500$ ,  $B_{0y2} = -0.560$  (T)), (c) 一方が長くなり、他方が短くなった場合 ( $B_{0y1} = 0.473$ ,  $B_{0y2} = -0.530$  (T)) の解析を行い、寸法修正要素がどのように磁石の長短を表現するかの考察を行った。



第 1.17 図 磁石モデル

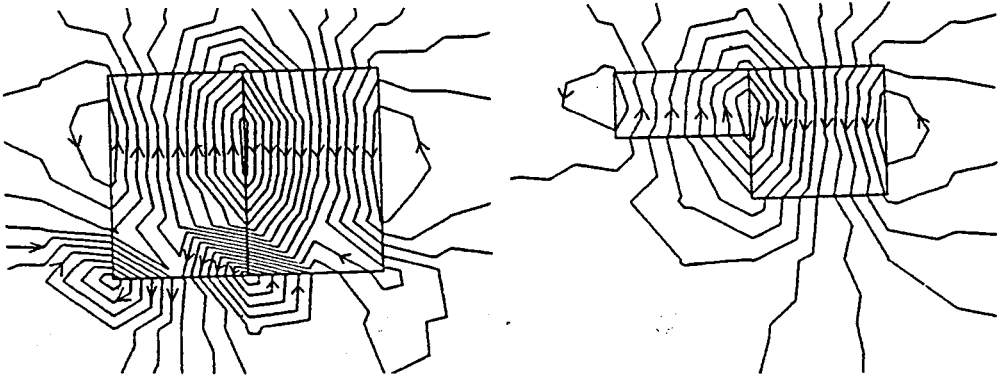
第 1. 18 図の左側の図はいずれも寸法修正要素を用いた場合の磁束分布である。計算の結果、磁石 1, 2 の長さは(a)図ではそれぞれ 64, 126 (mm), (b)図では 279, 346 (mm), (c)図では 167, 233 (mm) となった。磁石寸法をこの値にして、通常の有限要素法で磁束分布を解析した結果を右側の図に示す。

これらの図から、磁石がともに短くなる場合は、寸法修正要素を付加した部分に磁化と反対方向の起磁力が加えられ、また、磁石がともに長くなる場合は、磁化と同方向の起磁力が加えられることがわかる。磁石の一方が長くなり、他方が短くなる場合は、長くなる方の磁石に磁化と同方向の起磁力が、短くなる方の磁石に磁化と反対方向の起磁力が現れる。また、寸法修正要素を付加した付近の磁束分布は右側の図と左側の図でかなり異なっているが、磁束密度が指定された側の磁石表面の磁束分布は、かなり良く一致していることがわかる。

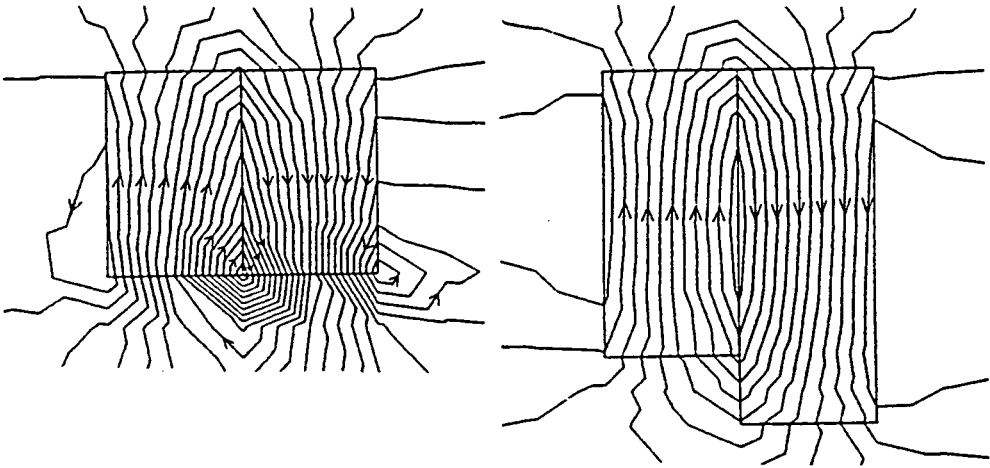
このように寸法修正要素を用いれば、分割図の修正を行わなくても所望の磁気回路の寸法が求まり、かつ磁束密度を指定した付近の磁束分布がかなりの精度で求められるため、所与の磁束分布を満足する磁気回路の設計に本手法は極めて有用である。

## (2) 誤差の検討

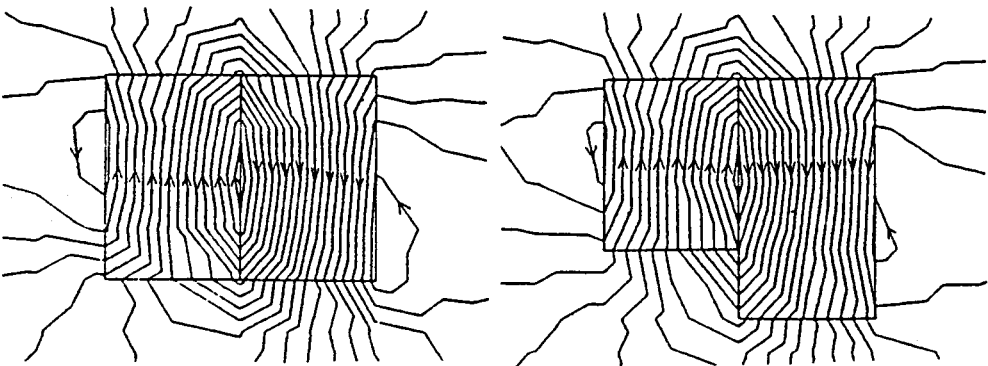
本手法の精度を実験的に検証するためには、求まった寸法の磁石をそのつど作り、所定の箇所の磁束密度の測定値が所与の磁束密度になっているかどうかの検討を行えばよいが、ここでは、そのつど磁石を作らなくてもよいように、次のような方針のもとで検討を行った。すなわち、まず通常の有限要素法の精度の実験的検討を行う。次に、本手法を用いて所与の磁束密度を満足する磁石の寸法を求め、



(a) 2 個の磁石がともに短くなった場合



(b) 2 個の磁石がともに長くなった場合

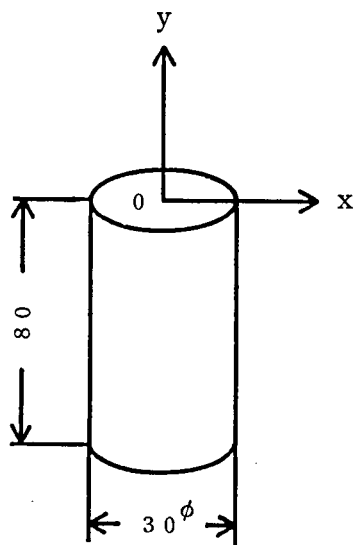


(c) 磁石の一方が長くなり，他方が短くなった場合

第 1.18 図 磁石が伸縮した場合の磁束分布

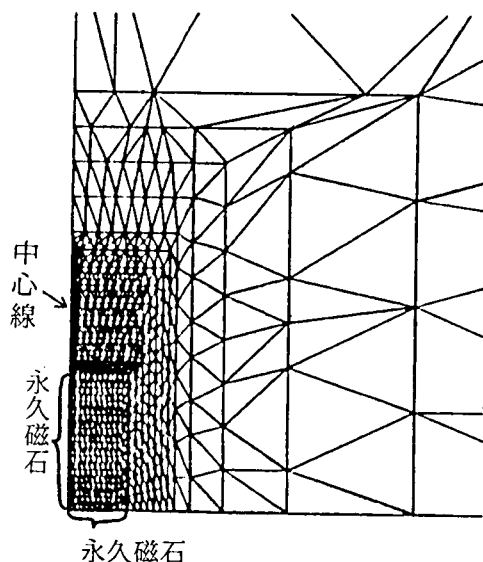
この寸法の磁石を試作するかわりに、この寸法に対応する分割図を作り、所定の箇所の磁束密度を通常の有限要素法を用いて求め、所与の磁束密度に対する誤差を計算した。この際、通常の有限要素法の精度は前述のように別箇に検討してあるので、これにより本手法の精度の裏付けを行うことができる。

第 1.19 図のような円柱磁石を用いて、通常の有限要素法の精度の実験的検討を行った。なおこの磁石は、異方性のストロンチウムフェライト磁石である。



第 1.19 図 円柱磁石

第 1.20 図に、第 1.19 図の円柱磁石の右上 1/4 の分割図を、第 1.21 図に、磁石の中心線上における磁束密度の y 方向成分の測定値と計算値の比較を示す。なお、測定はホール素子を用いて行った。一次三角形要素を使った場合は要素内の磁束密度は一定<sup>(7)</sup>なので、図では計算

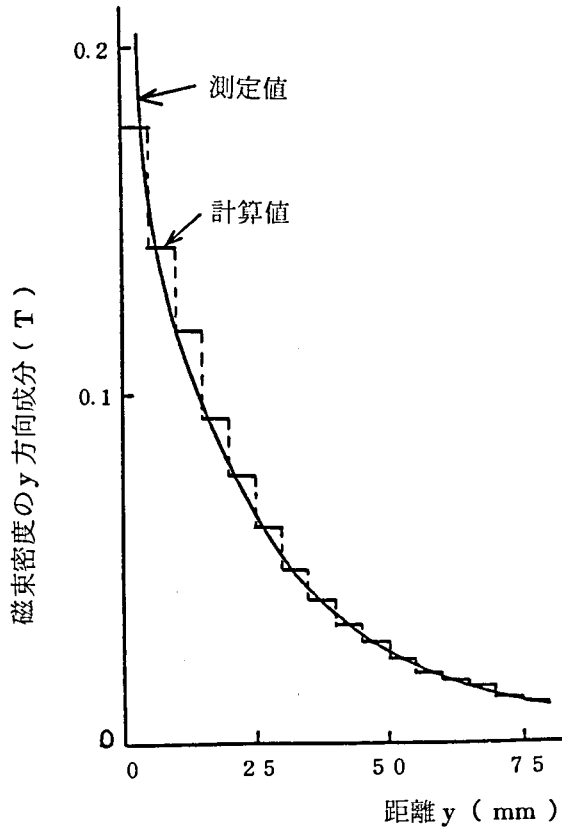


第 1.20 図 分 割 図

値を－で示した。－の長さは一要素の占める範囲に対応する。これより、第 1.20 図程度の細かさの分割図では、計算値と測定値は約 3 (%)程度の精度で一致することがわかる。分割をさらに細かくすれば精度が良くなることはもちろんである。

寸法決定法を導入した有限要素法により、所与の磁束密度を満足する磁石の寸法を求め、次にこの寸法の磁石の磁束分布を通常の有限要素法により計算して、所与の値と比較することにより、本手法の誤差の検討を行う。

まず、第 1.14 図の磁石について、幅  $W$  は  $40(mm)$ 一定とし、長さ  $L$  を種々変化して、磁石表面の磁束密度の  $y$  方向成分  $B_y$  を従来の有限要素法によって計算した。次に、同じ磁石で基準長  $L_0$  を  $40(mm)$ 一定とし、寸法修正要素を用いて上記  $B_y$  に対応する磁石の修正量  $D$



第 1.2 1 図 磁束密度の測定値と  
計算値の比較

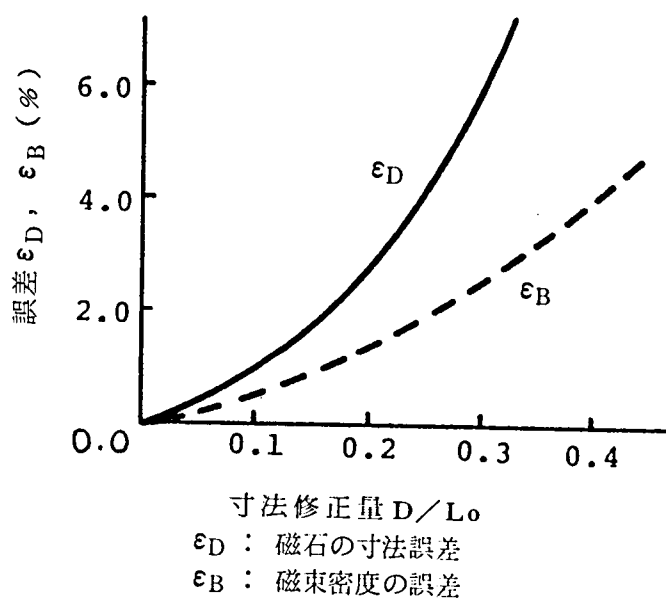
を計算した。第 1.2 2 図の実線は、次式で定義される磁石の寸法誤差  $\epsilon_D$  を示す。

$$\epsilon_D = \left| \frac{L - L^*}{L^*} \right| \times 100 \quad (\%) \quad (1.22)$$

ここで、 $L$  は本手法により求められた磁石寸法、 $L^*$  は所与の磁束密度を生ずる磁石の寸法である。また、破線は次式で定義される磁束密度の誤差  $\epsilon_B$  を示す。

$$\epsilon_B = \left| \frac{B_y - B_{oy}}{B_{oy}} \right| \times 100 \quad (\%) \quad (1.23)$$

ここで、 $B_y$ は磁石長が $L$ である場合のP点の磁束密度を通常の有限要素法によって計算した値、 $B_{oy}$ は所与の磁束密度である。これより、磁石の寸法修正量が約30%以内であれば、本手法により約3%程度の誤差で所与の磁束密度を生ずる磁石の寸法を求め得ることがわかる。



第 1.2.2 図 寸法修正要素の誤差

もし、磁石寸法の修正量  $D$  が大きくてかなりの誤差がある場合は、第 4.1.4 図の  $L_0 + D$  を新しく  $L_0$  とおき、第 1.1.3 図(b)に破線で示したような反復計算を行い、寸法  $D$  の修正を行ってゆけば、必要な磁石寸法を精度良く求めることができる。ここでは、第 1.1.7 図のモデルを用いて、反復を行った際の磁石寸法の真値への収束性及び磁束密度の誤差についての検討を行う。

第 1.23 図(a)~(c)に、 $B_{0y1}=0.50$ ,  $B_{0y2}=-0.46$  (T)として寸法修正要素を用いた場合の各反復における磁束分布を、(d)図に最終寸法における磁束分布を示す。これより、反復回数が増すにつれて、磁石上部の磁束分布だけでなく、全体の磁束分布が良く一致するようになることがわかる。

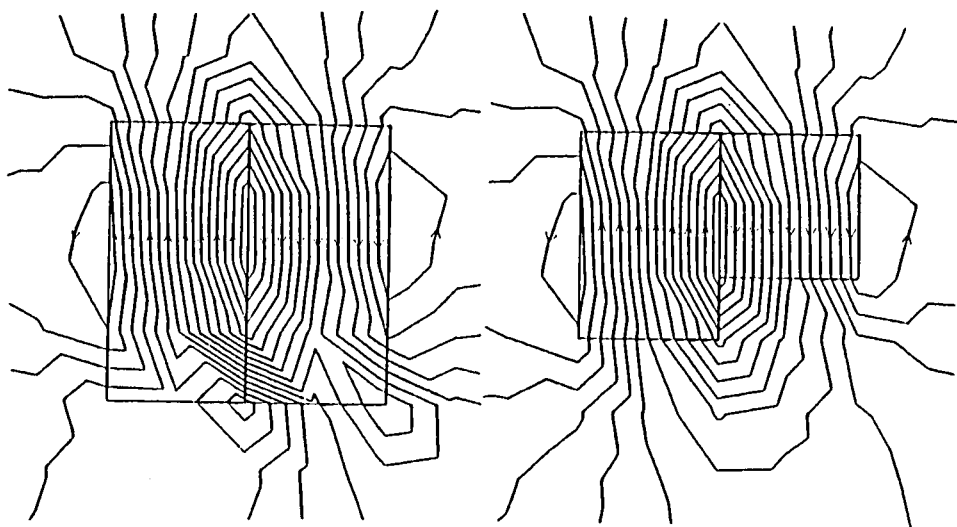
第 1.24 図に、各反復における磁石 1 及び 2 の寸法修正量  $D$  及び磁束密度の誤差  $\epsilon_B$  を示す。この例では、3 回も反復すれば誤差 1 (%)以内で所望の磁石寸法が求まることがわかる。このように本解析法を用いれば、寸法修正量が大きい場合でも、わずかの反復を行うだけで、極めて精度良い解析を行うことができる。

### (3) 実機への適用

ここでは、電子複写機のマグネトロールへの本手法の適用について検討するとともに、消去ヘッド等への適用についても言及する。

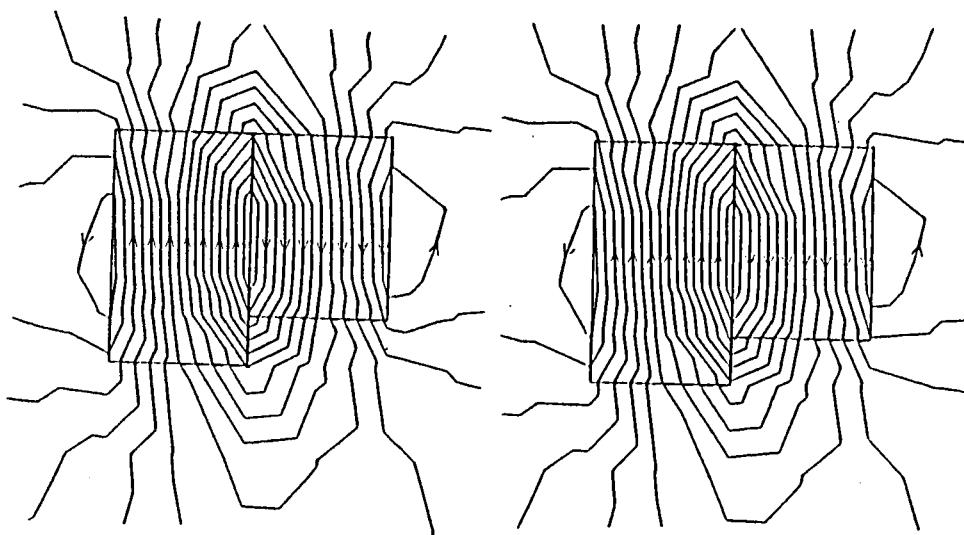
マグネトロールの設計においては、ロール表面の磁束密度が所与の値になる磁石寸法を求める必要があるが、従来は試行錯誤的に設計を行っていた。例えば、従来は第 1.25 図のように磁石を一個だけ配置した場合のロール表面の磁束分布を種々の寸法の磁石に対して実験的に求めておき、次に適当な寸法の磁石の組合せを経験的に作り、個々の磁石の磁束分布の合成値が所与の分布になっているかどうか判定し、そうでない場合には再び磁石の寸法の組合せを仮定して繰返すという手法がとられる。それゆえ、もし従来の手法を用いて所与の磁束分布を生ずる磁石寸法を正確に求めようとしても、磁石寸法の組合せが非常に多くなり過ぎるため、これは不可能に近い。またこのような試行錯誤に頼っている限りは、磁石の断面積の総和が最小、つまり材料費が最も少なくなる磁石寸法の検討を行うこと





(a) 1 回目の計算結果

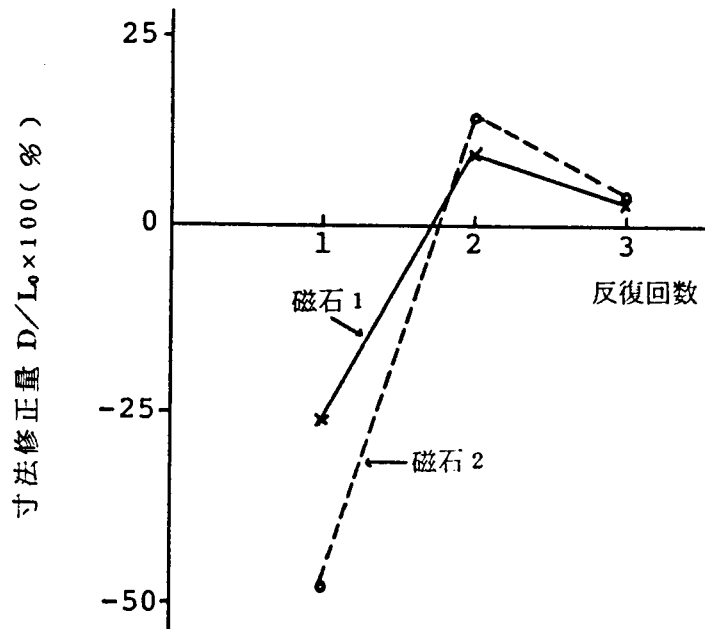
(b) 2 回目の計算結果



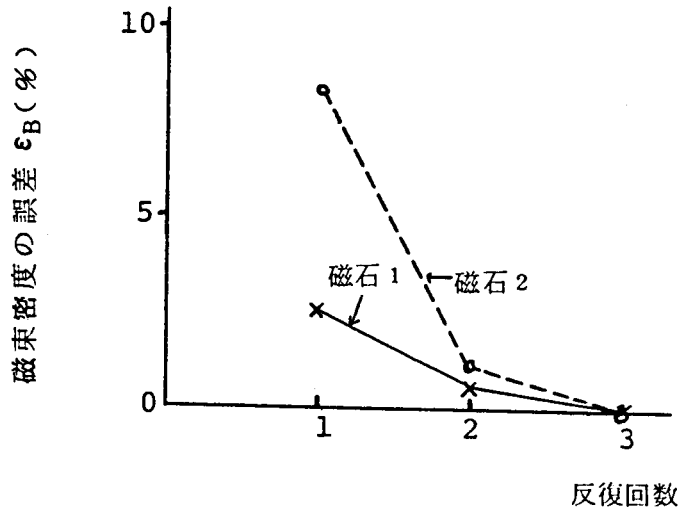
(c) 3 回目の計算結果

(d) 最終寸法の磁石の  
計算結果

第 1.23 図 各反復における磁束分布



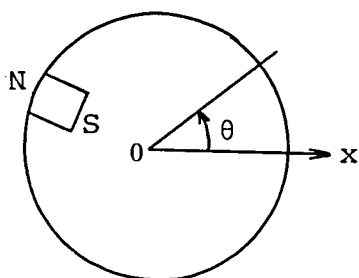
(a) 寸法修正量



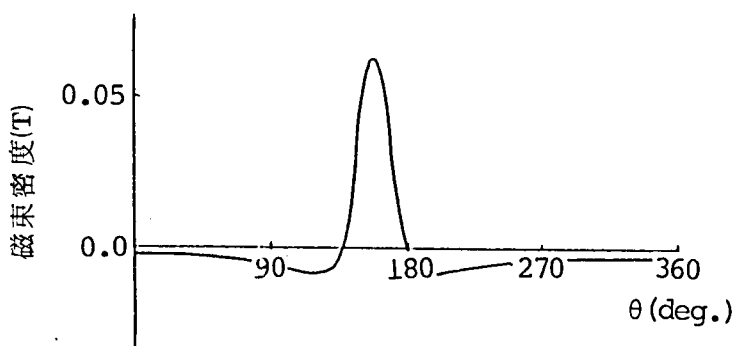
(b) 磁束密度の誤差

第 1.24 図 磁石寸法及び磁束密度の収束性

等はできない。ここでは、このマグネツトロールの設計に寸法決定法を導入した有限要素法を適用すれば、従来の苦勞が解消されることを示す。



(a) 磁石が 1 個あるモデル



(b) 磁束密度の半径方向成分

第 1.25 図 ロール表面の磁束分布

第 1.2 図に示したマグネツトロールのモデルを用いて、検討を行った。但し、磁石①の幅は 20 (mm)，磁石②～⑥のそれは 13 (mm) である。磁石①～④，⑥はフェライト磁石とし、その磁化は  $0.4(\text{Wb}/\text{m}^2)$ ，磁石⑤はゴム磁石とし、その磁化は  $0.24(\text{Wb}/\text{m}^2)$  として線形計算を

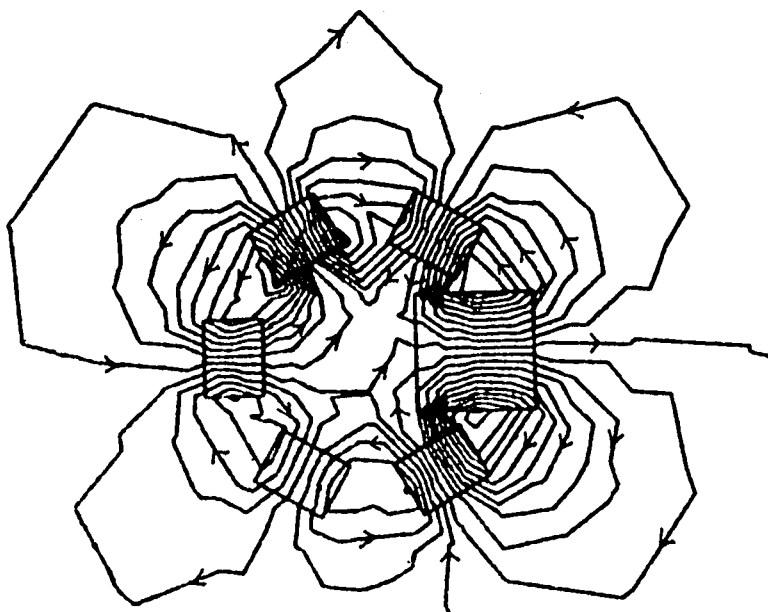
行った。なお、フェライト磁石及びゴム磁石は磁化がほとんど一定なので、線形と仮定しても大きな誤差は生じない。

第 1.2 図の磁石①～⑥の表面の磁束密度  $B_1 \sim B_6$  を第 1.1 表に示した値に指定して、寸法決定法を導入した有限要素法を適用した場合の磁束分布を第 1.26 図(a)に示す。求まった磁石寸法  $L_1 \sim L_6$  は第 1.1 表に示したとおりである。磁石寸法をこの値にして、通常の有限要素法で磁束分布を解析した結果を(b)図に示す。磁石の外側表面の磁束分布は両者ともかなり良く一致していることがわかる。また、第 1.1 表より、かなり寸法修正を行ってもこの例では磁束密度の誤差  $\epsilon_B$  は約 8 (%) 以内であることがわかる。

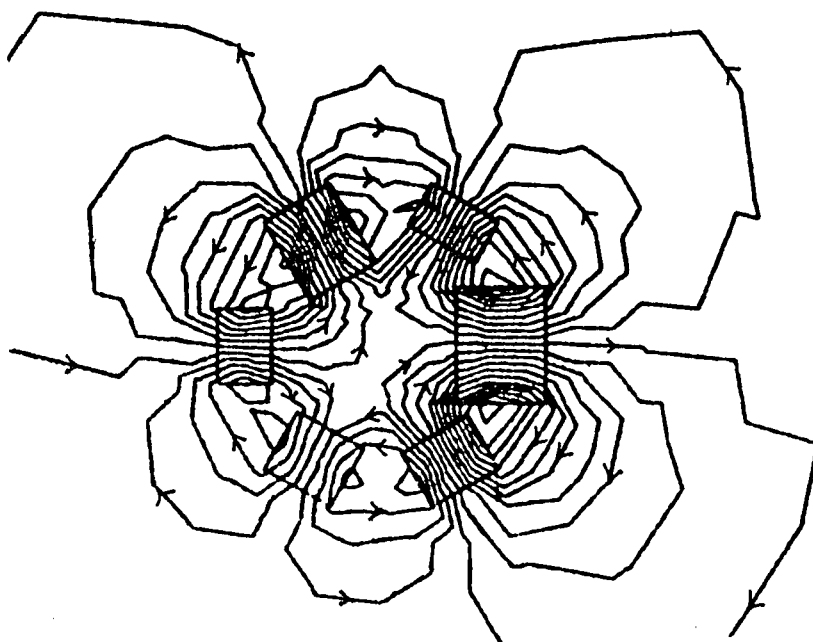
なお、この磁束密度の誤差は第 1.13 図(b)の実線の計算を 1 回行っただけの結果に対するものであるが、破線で示した反復を数回繰返せば、相当な高精度で磁石寸法を求め得ることはもちろんである。

第 1.1 表 各磁石の寸法及び磁束密度

	磁石表面 の磁束密度 の指定 値 $B$ (T)	修正前の 寸法 $L_0$ (mm)	寸法修正 量 $D$ (mm)	修正後の 寸法 $L$ (mm)	寸法修正 の割合 $D/L_0$ $\times 100$ (%)	修正後の 寸法にお ける磁石 表面の磁 束密度 (T)	磁束密度 の誤差 $\epsilon_B$ (%)
磁石 ①	0.151	20	-4.8	15.2	24	0.147	2.6
②	-0.162	10	-1.9	8.1	19	-0.150	7.4
③	0.177	10	5.5	15.5	55	0.176	0.6
④	-0.150	10	-0.8	9.2	8	-0.147	2.0
⑤	0.094	10	1.5	11.5	15	0.093	1.1
⑥	-0.176	10	0.5	10.5	5	-0.180	2.3



(a) 寸法修正要素を用いた計算結果

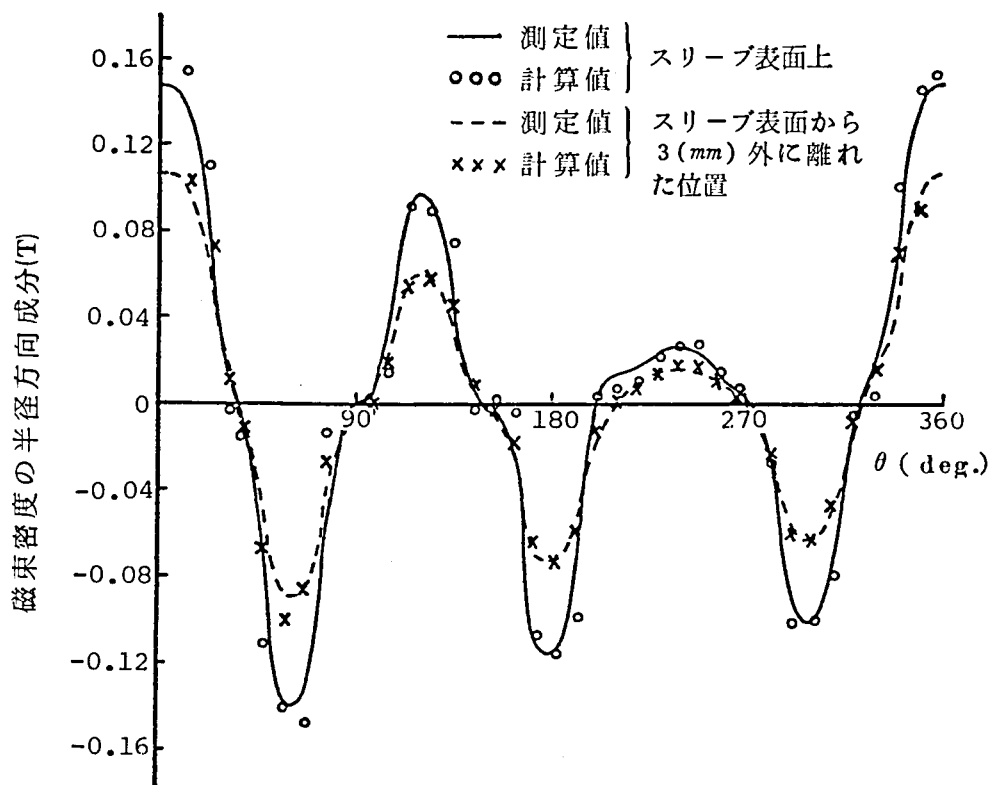


(b) 磁石寸法を修正した場合の計算結果

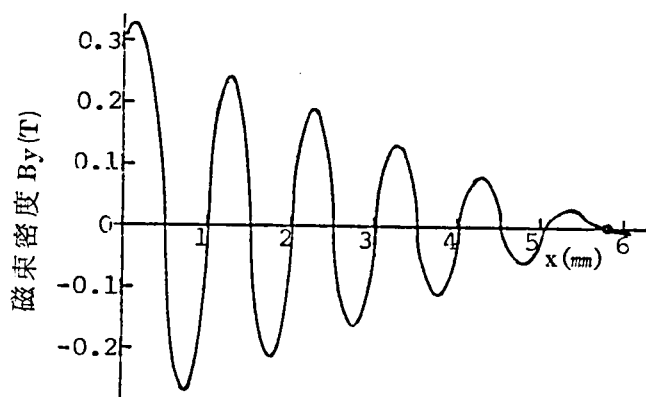
第 1.26 図 磁束分布

第 1.2.8 図に、スリーブ表面上と、それから 3 (mm) 外に離れた位置における磁束密度の半径方向成分の測定値及び計算値を示す。測定値と計算値はかなり良く一致しており、本解析法をマグネトロールの設計に適用できることがわかる。

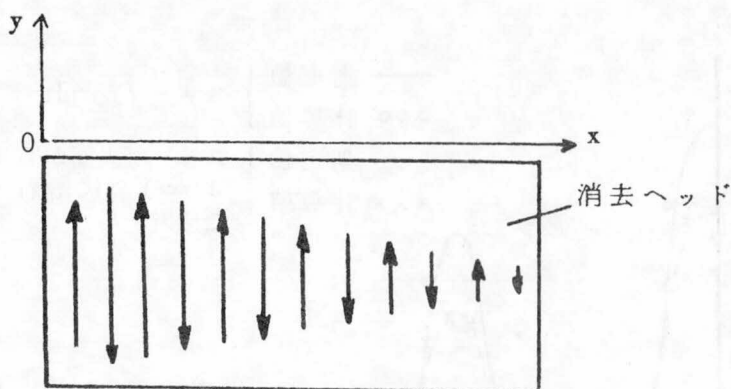
- 42 -



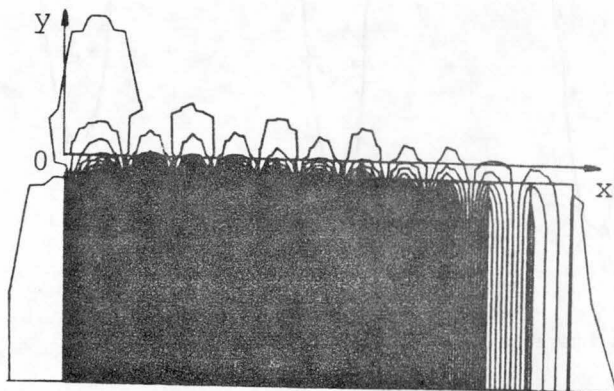
第 1. 2 8 図 磁束密度の半径方向成分



第 1. 2 9 図 振動磁界



第 1.30 図 消去ヘッドの磁化分布



第 1.31 図 磁束分布

いて、端子電圧の代わりに磁束密度を与え、電流の代わりに磁化を求めればよい。<sup>(18)</sup> 第 1.31 図に、この手法を用いた場合の磁束分布を示す。また、磁石の長さを変えることにより第 1.29 図の振動磁界を生じさせる場合には、寸法決定法を導入した有限要素法が威力を発揮する。本章で開発した二手法を用いれば、消去ヘッドの構成として磁化分布を与える方法がよいか、磁石の寸法を変える方法がよいか等の最適構造の検討も可能である。

また、寸法決定法を導入した有限要素法を用いれば、高調波の出ない



回転機のスロット寸法の決定，所与の電界を生ずる電極寸法の決定等も可能である。

### 1.5 結 言

所与の端子電圧を与えて電流及び磁束分布を直ちに求めることのできる外部電源を考慮した有限要素法と，特定部分の磁束分布が所与の条件を満足する機器寸法を決定できる寸法決定法を導入した有限要素法を考案し，その有用性を確かめた。本章において得られた結果を要約して述べると以下の通りである。

(1) 外部電源を考慮した有限要素法を用いれば，多数の強制電流の値が未知の場合でも，端子電圧が与えられるとこれらを直接求めることができる。それゆえ，本手法の考案により，従来有限要素法による解析が困難であった，三相変圧器の磁化電流解析や，単相誘導電動機の特性格解析等が可能になった。

(2) 磁性体の寸法を修正することにより，所望の磁束分布を得たい場合に，寸法決定法を導入した有限要素法を用いれば，必要な寸法を直ちに求めることができる。これを電子複写機のマグネツトロールの磁石寸法の決定に適用するとともに，実験的検討を行い，本解析法を設計に用いることができることを示した。本手法の考案により，試行錯誤を必要としない，多数個の磁性体の寸法設計が可能になった。

(3) これらの新手法は，反復計算を必要としないので，従来法に比べて計算時間を大幅に短縮できる。

このように，端子電圧や磁束分布が与えられ，それを満足する電流や電気機器の寸法を直接求める手法の考案により，有限要素法を用いた電気機器の最適設計法は，実用化に向って一步前進したと考える。

## 第2章 ギャップ，シールド等を有する電気機器の新解析法

### 2.1 緒 言

電気機器の磁界解析を行う際，例えば電磁石のプランジャとヨーク間や，鉄心中に存在するけい素鋼板の継ぎ目部<sup>(4)</sup>の空隙のように，非常に狭い範囲で材料定数が大きく変化する，いわゆるギャップを有する問題に遭遇することがしばしばある。これを従来の有限要素法を用いて解析する場合は，ギャップ部を無視するか，あるいはこの部分を細かく分割して計算していた。しかしながら，ギャップ部の磁気抵抗は鉄部のそれに比べてかなり大きいため，ギャップの影響を無視することはできず，これを無視した解析結果は実験結果とかけ離れることになる。また，狭いギャップ部を細かく分割すれば，要素係数マトリクスが膨大になり，かなりの計算時間がかかる。このように，従来の有限要素法は狭いギャップを有する領域の磁界解析を行うには不向きである。また，一般に，ギャップ付近のミクロな磁気特性を知る必要はなく，ギャップが電気機器全体としてのマクロな磁気特性に及ぼす影響を検討する必要がある場合が多いので，ギャップ部を細かく分割する必要もない。

変圧器のタンクなどには，漏れ磁束による局部過熱を防止するため，しばしば電磁シールドが用いられる。電磁シールドの寸法やその取付け位置が電力機器の特性に及ぼす影響を検討する際，従来の有限要素法を用いれば，シールド寸法に対応して，そのつど分割図を修正する必要があるが，分割図の作成に多大の労力を費さねばならない。

また，けい素鋼板接合部の磁束分布は接合部に存在するギャップの寸法だけでなく，けい素鋼板の長さによっても変化するが，この影響の検討を行う際，従来の有限要素法では，接合部以外の磁束分布を知る必要

がなくても、けい素鋼板の長さを色々に変えた各種分割図を作って解析を行うことにより、長さの影響を求めている。

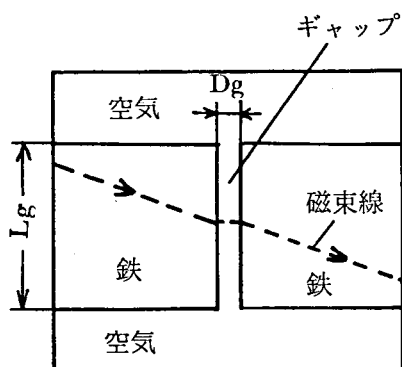
第1章では、エネルギーは有するが面積を持たない寸法修正要素なるものを考案し、これを用いて寸法修正量を求める手法を述べたが、このエネルギーは有するが面積を持たない要素という考え方をさらに発展させて、寸法修正要素にギャップやシールドのエネルギーを持たせた「ギャップ要素」、「シールド要素」なる要素を考案した。これらの要素は、ギャップ長あるいはシールド板の厚さが非常に小さいため、それらの中では磁束分布が一樣であると仮定してもよいことに着目したものである。この考え方をさらに拡張することにより、寸法が大きくても、その中の磁束分布が一樣であると仮定できる鉄心部分が、電気機器の特性に及ぼす影響を検討するための「延長要素」なる要素も考案した。これらの要素を用いれば、同一の分割図によってギャップ、シールド板の寸法やけい素鋼板の長さが機器の磁気特性に及ぼす影響を容易に知ることができるので、分割に要する労力を大幅に節減できる。

## 2.2 ギャップ要素

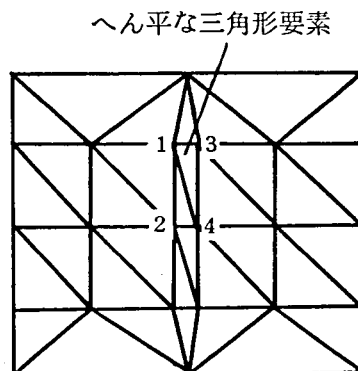
### 2.2.1 概要と特長

ギャップ要素は、前章で述べた寸法修正要素に、エネルギーとしてギャップのエネルギーを持たせた線要素であり、これをギャップ部に付加することによりギャップを表現する。

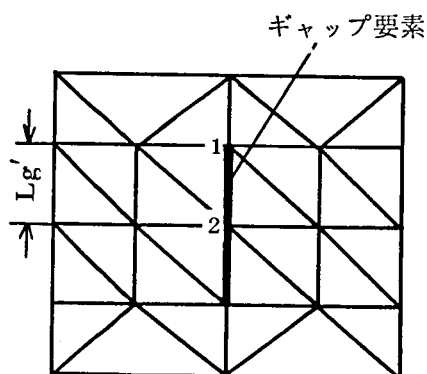
第2.1図(a)に、長さが $D_g$ 、幅が $L_g$ のギャップのモデルを示す。(b)図はギャップをへん平な三角形要素を用いて分割した通常の分割図、(c)図はギャップ要素を用いた分割図であり、太線1-2がギャップ要素<sup>10,19</sup>である。このギャップ要素は(a)図のギャップに対応しており、ギャップ



(a) ギャップを有する領域



(b) へん平な三角形要素を用いた分割図



(c) ギャップ要素を用いた分割図

第 2.1 図 ギャップ要素の説明図

と同じエネルギーを有しているが、面積を持たない要素である。

ギャップ要素は次のような特長を有している。

- (a) 面積を持たないため、再分割しなくても、既に出来上っている分割図上の任意の位置に新しくギャップを追加あるいは削除することができる。
- (b) ギャップ長  $Dg$  の変更が容易である。それゆえ、この要素を使えば、ギャップ長が磁気特性に及ぼす影響を容易に検討することができる。

(c) ギャップ長が小さい場合には、(b)図のようにへん平な三角形要素を使う従来の分割法よりも精度が良くなる。

空気の磁気抵抗率は鉄の数千倍であるので、(a)図のように、ギャップ部と鉄部の境界では、磁束は境界線に垂直に通る。それゆえ、(b)図の各節点 1 ～ 4 のベクトルポテンシャル  $A_1 \sim A_4$ の間には次式の関係が成立つと仮定できる。

$$A_1 = A_3 \quad , \quad A_2 = A_4 \quad (2.1)$$

ギャップ長が十分に小さく、かつ、ベクトルポテンシャル間には上式の関係があるので、節点 1 と 3、2 と 4 を(c)図のように移動させて、ギャップ部を 1 本の線で表してもほとんど誤差は生じないと考えられる。

## 2.2.2 定式化

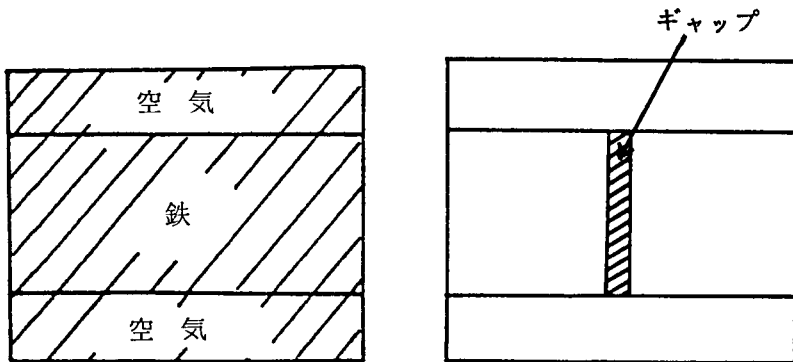
領域の全エネルギー  $\chi$  を、次式のように成分に分解して考える。

$$\chi = \chi_t + \chi_g - \Delta\chi_s \quad (2.2)$$

ここで、 $\chi_t$  は、第 2.1 図(a)を第 2.2 図(a)のようにギャップ部も鉄でできていると仮定した場合のエネルギーである。 $\chi_g$  は第 2.2 図(b)に斜線で示したギャップ部の実際のエネルギーを示す。 $\Delta\chi_s$  は、(c)図のように、ギャップ部が鉄でできていると仮定した場合のギャップ部のエネルギーであり、次式で与えられる。<sup>(7)</sup>

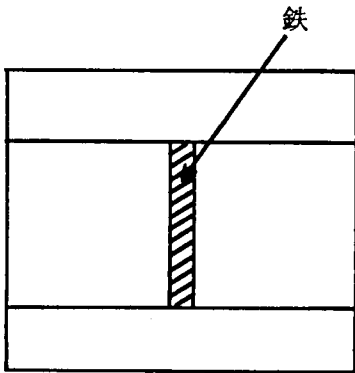
$$\Delta\chi_s = \sum \frac{1}{2} \nu_s B_g^2 S_g^{(e)} \quad (2.3)$$

ここで、 $\nu_s$  及び  $B_g$  はそれぞれ、ギャップに隣接した鉄の磁気抵抗率及びギャップ中の磁束密度である。 $S_g^{(e)}$  は一つのギャップ要素  $e$  に対応



(a) ギャップ部を鉄で置換えた領域

(b) ギャップ



(c) 鉄で置換えたギャップ

第 2.2 図 領域のエネルギーの説明図

するギャップ部の面積を示す。 $\Sigma$ は全ギャップ要素についての総和を示す。(2.2)式は、 $\chi_t$ の所で、 $4\chi_s$ だけエネルギーを余分に計算している。従って(2.2)式では、この $4\chi_s$ を差し引いているのである。

第 2.1 図のギャップ要素 1-2 の有するエネルギー  $\chi_g^{(e)}$  は、次式で計算される。

$$\chi_g^{(e)} = \frac{1}{2} \nu_0 B g^2 S_g^{(e)} \quad (2.4)$$

第 2.1 図の場合は,  $Bg = (\Lambda_1 - \Lambda_2) / Lg'$ ,  $Sg^{(e)} = Lg'Dg$  となるので, 上式は次式となる。

$$\chi g^{(e)} = \frac{1}{2} \nu_0 \left( \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{Lg'} \right)^2 Lg'Dg \quad (2.5)$$

ここで,  $Lg'$  は第 2.1 図(c)に示したように, 一つのギャップ要素の幅である。結局, ギャップ要素を用いた場合の節点 1, 2 に対する有限要素法の式は, (2.5) 式をギャップ部の領域で総和したものと (2.3) 式を (2.2) 式に代入し, これを  $\Lambda_1, \Lambda_2$  で偏微分することにより次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial \Lambda_1} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \Lambda_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi_t}{\partial \Lambda_1} \\ \frac{\partial \chi_t}{\partial \Lambda_2} \end{Bmatrix} + \sum_{Ri} (\nu_0 - \nu_s) \frac{Dg}{Lg'} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Lambda_{1e} \\ \Lambda_{2e} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

ここで,  $\sum_{Ri}$  は節点  $i$  ( $i = 1, 2$ ) を含む要素群についての総和を, 節点  $1e, 2e$  は一つのギャップ要素の 2 節点を示す。また  $\partial \chi_t / \partial \Lambda_i$  は, ギャップ要素を使わない場合の全領域の通常の有限要素法の式<sup>(7)</sup>である。

ニュートン・ラプソン法<sup>(8)</sup>を用いて非線形解析を行う場合,  $k+1$  回目の反復で得られる節点  $i$  のポテンシャルの近似解  $\Lambda_i^{(k+1)}$  は次式で与えられる。

$$\Lambda_i^{(k+1)} = \Lambda_i^{(k)} + \delta \Lambda_i^{(k)} \quad (2.7)$$

ここで,  $\delta \Lambda_i^{(k)}$  は次式を解くことにより求まる。<sup>(7)</sup>

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \Lambda_1 \partial \Lambda_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \chi}{\partial \Lambda_1 \partial \Lambda_n} \\ \vdots & \frac{\partial^2 \chi}{\partial \Lambda_i \partial \Lambda_j} & \vdots \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial \Lambda_n \partial \Lambda_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \chi}{\partial \Lambda_n \partial \Lambda_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \Lambda_1 \\ \vdots \\ \delta \Lambda_i \\ \vdots \\ \delta \Lambda_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \chi}{\partial \Lambda_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial \chi}{\partial \Lambda_i} \\ \vdots \\ -\frac{\partial \chi}{\partial \Lambda_n} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

ここで、 $n$ は未知節点数を示し、(2.8)式中の $A_i$ 、 $\chi$ はすべて $k$ 回目の値である。例えば、節点1,2に対する $\partial^2 \chi / \partial A_i \partial A_j$ は次式で与えられる。<sup>(7)</sup>

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \chi}{\partial A_1 \partial A_1} & \frac{\partial^2 \chi}{\partial A_1 \partial A_2} \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial A_2 \partial A_1} & \frac{\partial^2 \chi}{\partial A_2 \partial A_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \chi_t}{\partial A_1 \partial A_1} & \frac{\partial^2 \chi_t}{\partial A_1 \partial A_2} \\ \frac{\partial^2 \chi_t}{\partial A_2 \partial A_1} & \frac{\partial^2 \chi_t}{\partial A_2 \partial A_2} \end{bmatrix} + \sum_{Ri} (\nu_o - \nu_s) \frac{Dg}{Lg'} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

(2.6)、(2.9)式の右辺第1項は従来の有限要素法の式と同じである。右辺第2項がギャップ部が存在するために追加する項である。このように、従来の有限要素法の式にギャップ部を考慮したことによる項を付け加えるだけで、ギャップを有する領域の磁界解析を容易に行うことができる。

鉄部の磁気抵抗率が空気のそれに比べて十分小さいか、またはギャップ部の面積が微小な場合は、(2.3)式より、(2.2)式の $\Delta \chi_s$ を無視することができる。

### 2.2.3 本要素の有用性の検討

ここでは、ギャップ要素を用いた場合の変圧器の磁化電流波形の実験的検討<sup>(10)</sup>を行うとともに、ギャップ要素を電磁石の吸引力解析<sup>(2)</sup>に適用し、本要素の有用性を検討する。

#### (1) 二脚変圧器鉄心の磁化電流

第2.3図のような二脚変圧器鉄心の磁化電流が、接合部のギャップ長によってどのように影響されるかを検討した。太線は突合せ接合さ



れたけい素鋼板の接合部を示しており，この部分にギャップ要素を使用した。鉄心の材質は方向性けい素鋼板 G-10 とし，脚の最大磁束密度を 1.7(T) とした。

実験にあたり，接合部のギャップ長の設定は，接合部にクラフト紙を挿入することにより行った。

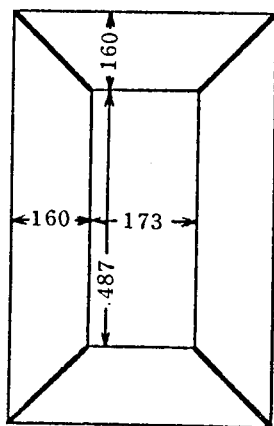
第 2.4 図に磁化電流波形を示す。実線は測定値，破線は計算値を示す。図中の K は次式で定義した。

$$K = \frac{\text{ギャップ長}}{\text{脚 幅}} \quad (2.10)$$

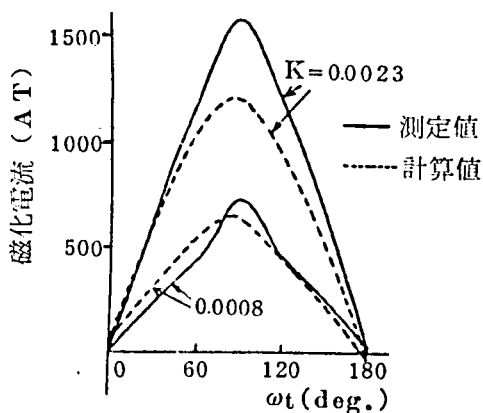
ギャップ長が大きくなると磁化電流波形が正弦波に近くなっている。計算値の位相差が測定値と異なるのは，解析ではヒステリシスを無視したためである。

## (2) 電磁石の吸引力解析

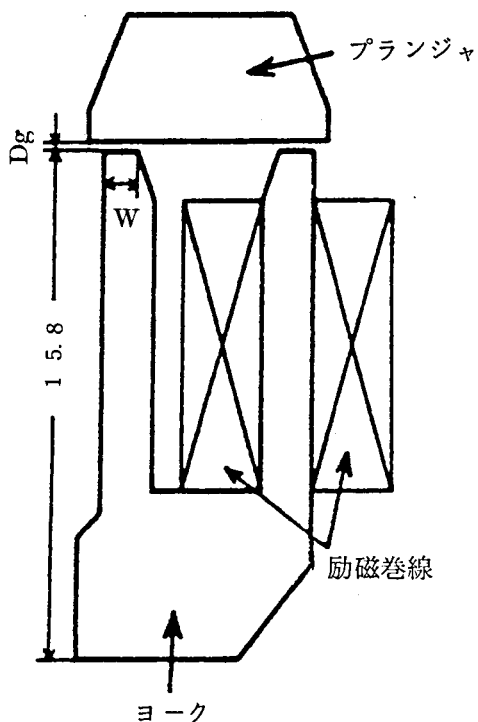
第 2.5 図のような電磁石について，励磁アンペアターンとギャップ長 Dg が磁束分布，電磁吸引力に及ぼす影響を検討した。磁界の解析にあたってはヨーク，プランジャ間のギャップ部分にギャップ要素を使用した。ヨーク及びプランジャはパーマロイで作られている。



第 2.3 図 二脚変圧器鉄心



第 2.4 図 磁化電流波形



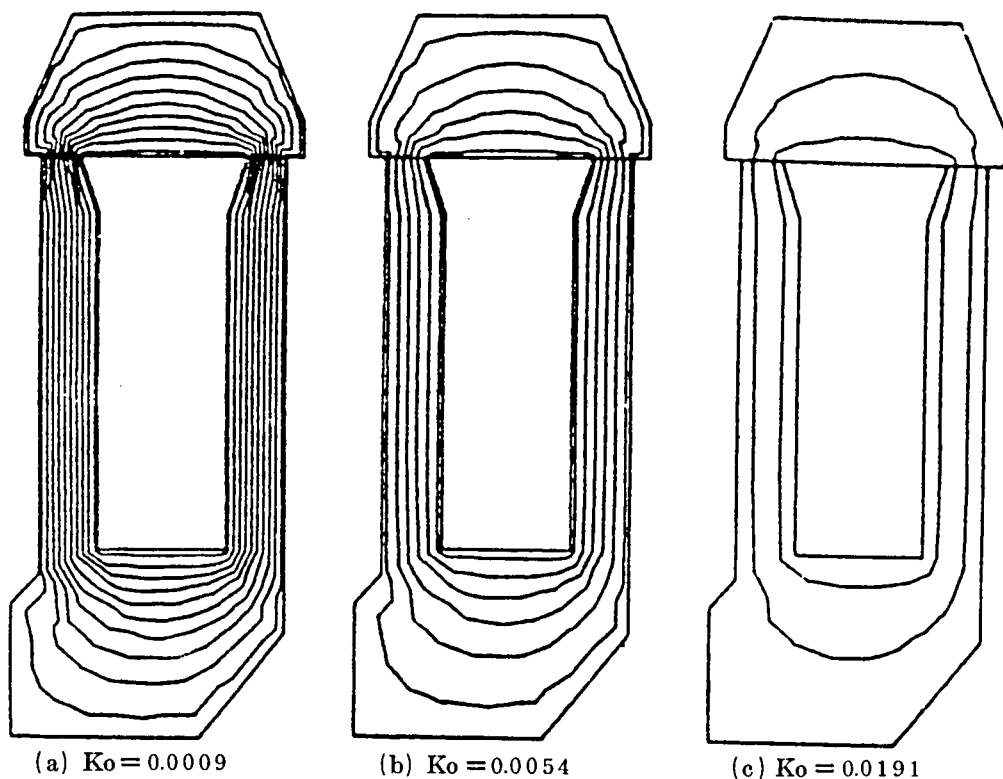
第2.5図 解析モデル

第2.6図に、励磁アンペアターンを10(AT)にした場合の磁束分布を示す。ここで、 $K_0$  は次式で定義した。

$$K_0 = \frac{\text{ギャップ長 } D_g}{\text{ヨーク先端の幅 } W} \quad (2.11)$$

等ベクトルポテンシャル線の間隔はいずれの図も同じにとった。ギャップ長の増加とともに、磁束が減少している様子がよくわかる。

励磁アンペアターンをパラメータにとり、ギャップ長を変えた場合の吸引力の特性を第2.7図に示す。ヨーク及びプランジャが飽和するにつれ、吸引力のギャップ長による変化が少なくなっている。なお、吸引力の計算には、エネルギー変位法とマクスウエルの応力法(詳細



$$Ko = \frac{\text{ギャップ長 } Dg}{\text{ヨーク先端の幅 } W}$$

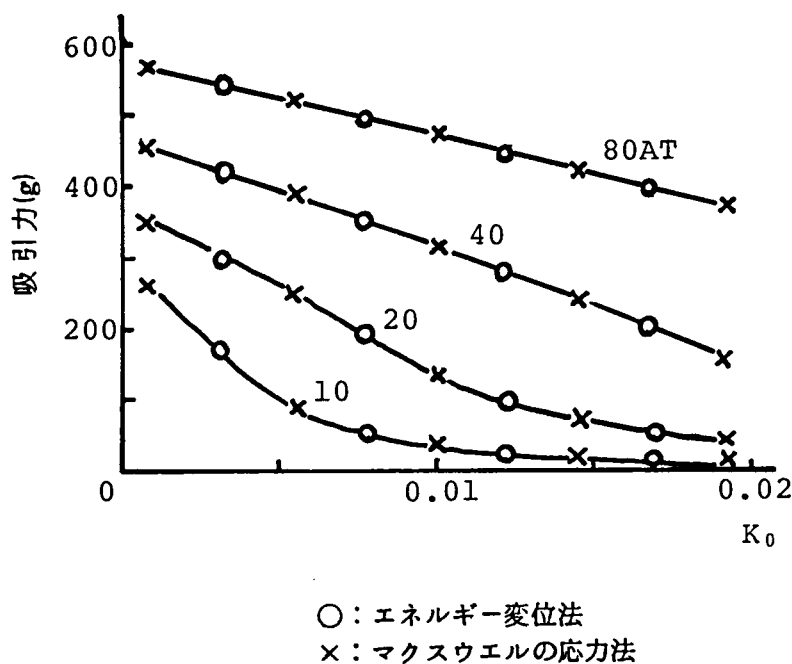
第 2.6 図 磁 束 分 布

は文献(4)参照)を用いたが、図のように、両手法とも同様な結果を示した。

このように、ギャップ長が全体の磁束分布に及ぼす影響を検討するような場合にギャップ要素を用いれば、データでギャップ長を指定するだけで、同じ分割図のままで種々のギャップ長における解析が行えるので、本手法はギャップを有する磁気回路のシミュレーションに極めて有用である。

また本要素は、変圧器鉄心接合部のギャップが磁気特性に及ぼす影響の検討(8)等にも有用である。

ギャップ要素の適用にあたっては(2.1)式のような仮定を行っているので、本要素はすべての場合に適用可能なわけではない。本要素の適用範囲については文献(4)で詳述した。



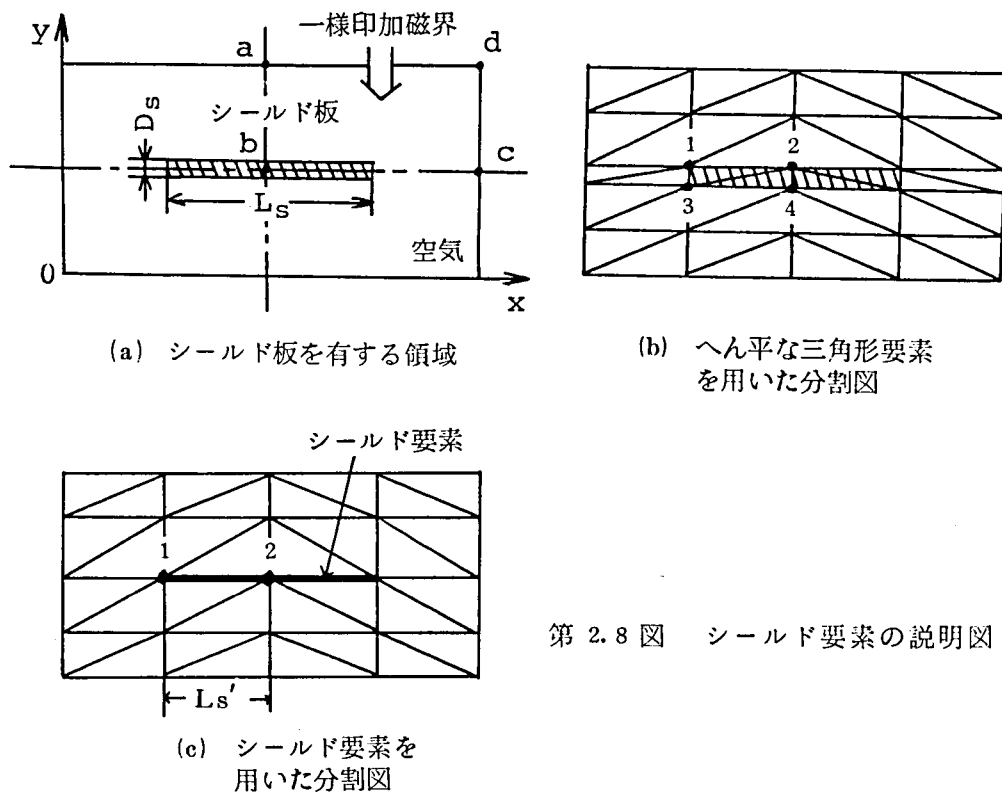
第 2.7 図 吸引力特性

## 2.3 シールド要素

### 2.3.1 概 要

シールド要素は、寸法修正要素にシールド板中を流れる渦電流によるエネルギーを持たせた線要素であり、シールド板の部分にこの要素を適用すれば、シールド板の機能をこの要素で表現できる。すなわち、この要素はシールド板中の渦電流による反作用磁界を生ずる。

第 2.8 図(a)のように、幅  $L_s$ 、厚さ  $D_s$  の無限長非磁性シールド板が印加磁界に対して垂直に置かれている場合を考える。(b)図はシールド板をへん平な三角形要素を用いて分割した通常の分割図、(c)図はシールド要素を用いた分割図である。



第 2.8 図 シールド要素の説明図

磁界がシールド板にはほぼ垂直に印加されても、シールド板が薄い場合や、板幅が狭い場合には、渦電流による反作用磁界が小さいので、磁束はシールド板にはほぼ垂直に侵入する。その場合には、(b)図の各節点 1 ～ 4 のポテンシャル  $A_1 \sim A_4$  の間には、( 2.1 ) 式の関係が成り立つと仮定できる。シールド厚さが十分に小さく、かつポテンシャル間に ( 2.1 ) 式の関係が成立する場合は、(b)図の節点 1 と 3、2 と 4 を

(c)図のように移動させて，シールド板を1本の線で表してもほとんど誤差は生じないと考えられる。(c)図の太線をシールド要素<sup>(2), (22)</sup>と呼ぶ。この要素は，(a)図のシールド板に相当しており，シールド板中の渦電流が有するエネルギーと等しいエネルギーを有するが，面積を持たない線要素である。それゆえ，シールド要素はギャップ要素と同様な特長を有している。

### 2.3.2 定式化

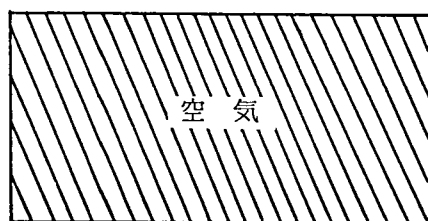
領域の全エネルギー $\chi$ を，次式のように成分に分解して考える。

$$\chi = \chi_t + \chi_s \quad (2.12)$$

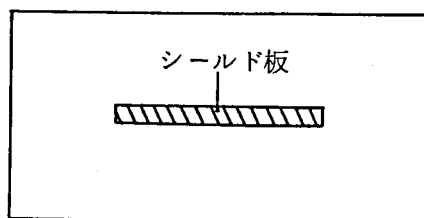
ここで， $\chi_t$ は第2.8図(a)を第2.9図(a)のように，シールド板も空気できていないと仮定した場合のエネルギーである。 $\chi_s$ は第2.9図(b)に斜線で示したシールド板の渦電流によるエネルギーであり，次式で計算される<sup>(7)</sup>。

$$\chi_s = \sigma \iint_{St} \left\{ \int_0^A \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dA \right\} dx dy \quad (2.13)$$

ここで， $A$ はベクトルポテンシャル， $\phi$ は電位， $\sigma$ は導電率， $St$ はシールド板の断面積である。



(a) シールド板を空気で置換えた領域



(b) シールド板

第 2.9 図 領域のエネルギーの説明図

( 2.1 ) 式より,  $\frac{\partial A}{\partial t}$  は, 厚さ方向に一様であることがわかる。また,  $\frac{\partial \phi}{\partial z}$  は同一導体中では一定であるので, <sup>(25,26)</sup> ( 2.13 ) 式は次式となる。

$$\chi_s = \sigma D_s \int \left\{ \int_0^A \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dA \right\} dx \quad ( 2.14 )$$

$\partial \phi / \partial z$  項は次のようにして計算される。<sup>(26)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= - \frac{1}{St} \iint_{St} \frac{\partial A}{\partial t} dx dy \\ &= - \frac{1}{St} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{e=1}^{ns} Ds \int_{x_{1e}}^{x_{2e}} ( N_{1e} A_{1e} + N_{2e} A_{2e} ) dx \\ &= - \frac{1}{St} \sum_{e=1}^{ns} Ds Ls' \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{A_{1e} + A_{2e}}{2} \right) \end{aligned} \quad ( 2.15 )$$

ここで,  $N_{1e}, N_{2e}$  は一次線要素の補間関数<sup>(43)</sup>である。 $Ls'$  は 第 2.8 図(c) に示したような, 一つのシールド要素の幅,  $St$  はシールド板の断面積 ( $=D_s \cdot L_s$ ),  $ns$  はシールド板中の要素数である。節点  $1e, 2e$  は一つのシールド要素の 2 節点を示す。

( 2.15 ) 式を ( 2.14 ) 式に代入し, 節点  $i$  のポテンシャル  $A_i$  で偏微分すれば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_s}{\partial A_i} &= \sum_{Ri} \sigma Ds \frac{\partial}{\partial t} \left[ A \frac{\partial A}{\partial A_i} \right] dx - \sum_{Ri} \frac{\sigma}{St} \sum_{e=1}^{ns} Ds^2 Ls' \frac{\partial}{\partial t} \frac{A_{1e} + A_{2e}}{2} \left[ \frac{\partial A}{\partial A_i} \right] dx \\ &= \sum_{Ri} \sigma Ds \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{1e}}^{x_{2e}} N_i ( N_{1e} A_{1e} + N_{2e} A_{2e} ) dx \\ &\quad - \sum_{Ri} \frac{\sigma}{St} \sum_{e=1}^{ns} Ds^2 Ls' \frac{\partial}{\partial t} \frac{A_{1e} + A_{2e}}{2} \int_{x_{1e}}^{x_{2e}} N_i dx \\ &= \sum_{Ri} \frac{\sigma Ds Ls'}{6} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{1e} \\ A_{2e} \end{Bmatrix} \\ &\quad - \sum_{Ri} \frac{\sigma}{4St} \sum_{e=1}^{ns} Ds^2 Ls'^2 \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{1e} \\ A_{2e} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad ( 2.16 )$$

結局，シールド要素を用いた場合の節点 1，2 に対する有限要素法の式は，<sup>(7),(8)</sup> (2.12) 式を節点 1，2 のベクトルポテンシャル  $A_1, A_2$  で偏微分したものに (2.16) 式を代入することにより，次式となる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial A_1} \\ \frac{\partial \chi}{\partial A_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_t}{\partial A_1} \\ \frac{\partial \chi_t}{\partial A_2} \end{bmatrix} + \sum_{Ri} \frac{\sigma D_s L_s'}{6} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1e} \\ A_{2e} \end{bmatrix} \\ &\quad - \sum_{Ri} \frac{\sigma}{4 S t} \sum_{e=1}^{ns} D_s^2 L_s'^2 \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1e} \\ A_{2e} \end{bmatrix} \quad (2.17) \end{aligned}$$

上式の  $\frac{\partial \chi_t}{\partial A_i}$  ( $i = 1, 2$ ) は，シールド要素を使わない場合の全領域の有限要素法の式である。

以上より，シールド板がある場合の有限要素法の式は，それが無い場合の式に (2.17) 式の右辺第 2，3 項を付け加えるだけで得られることがわかる。従って，極めて容易に任意の位置にシールド板を付加した場合の解析が可能である。

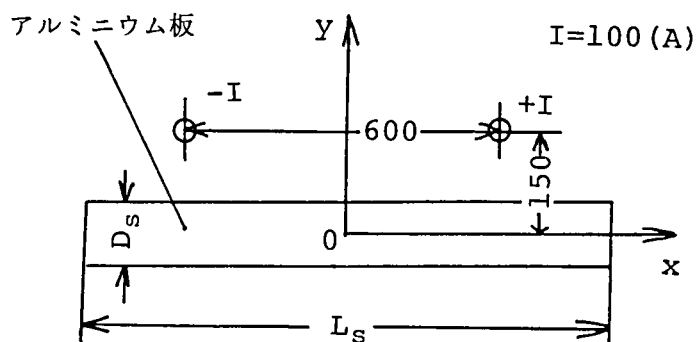
### 2.3.3 本要素の有用性の検討

ここでは，シールド要素を電磁シールド効果の解析<sup>(21)</sup>に適用して，本要素の有用性の検討を行う。

第 2.10 図のように，無限長のアルミニウム板に平行に往復導線を配置したモデルを用いて，シールド板の幅  $L_s$ ，厚さ  $D_s$  が磁束分布及び渦電流損に及ぼす影響をシールド要素を用いて検討する。<sup>(22),(23)</sup> 周波数は 60 (Hz)，電流は 100(A)とした。

第 2.11 図に，シールド板と導線間の距離を 150(mm)一定にし，板厚  $D_s$  及び板幅  $L_s$  を変えた場合の磁束分布を示す。図中 a で示した磁束線のように，一度シールド板を貫通し，磁路の短い経路を通るために再び





第 2.10 図 電磁シールドモデル

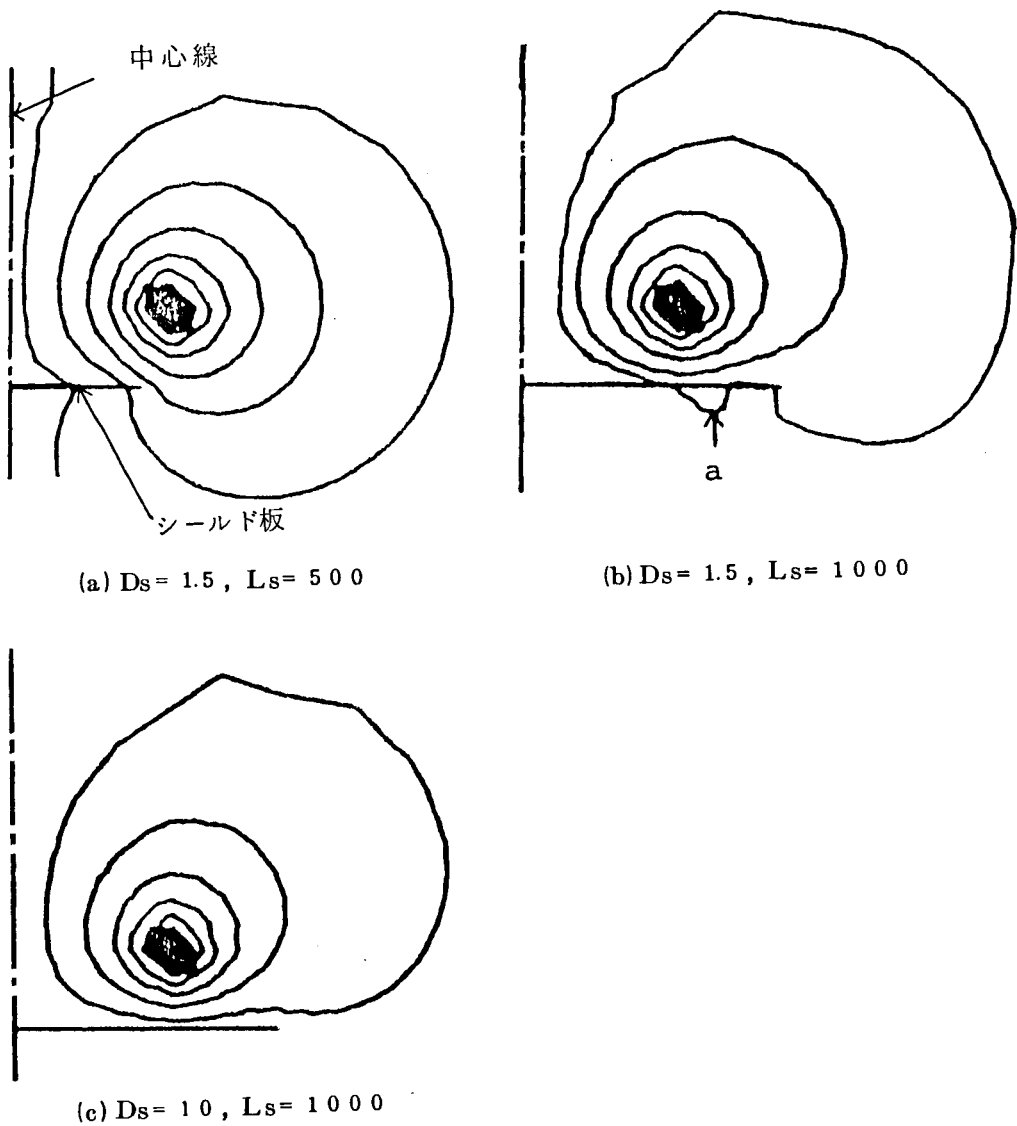
シールド板に侵入し直そうとする磁束が存在することがわかる。シールド要素を使用しても，このように渦電流の反作用磁界に起因する磁束の微妙な振舞いまで解析を行うことができる。

第 2.12 図に，板厚  $D_s$  を  $1.5(\text{mm})$  一定にしておいて，板幅  $L_s$  を変えた場合にシールド板表面における，磁束密度の板に垂直な  $y$  方向成分の時間的な最大値  $|B_y|_{\text{max}}$  の分布がどのように変化するかを示す。図から，板幅を大きくするほど，板表面の磁束密度が減少し，シールド効果が現れることがわかる。なお， $L_s = 1000(\text{mm})$  の場合の磁束分布の凹凸は，第 2.11 図(b)で述べた磁束線  $a$  に起因する。

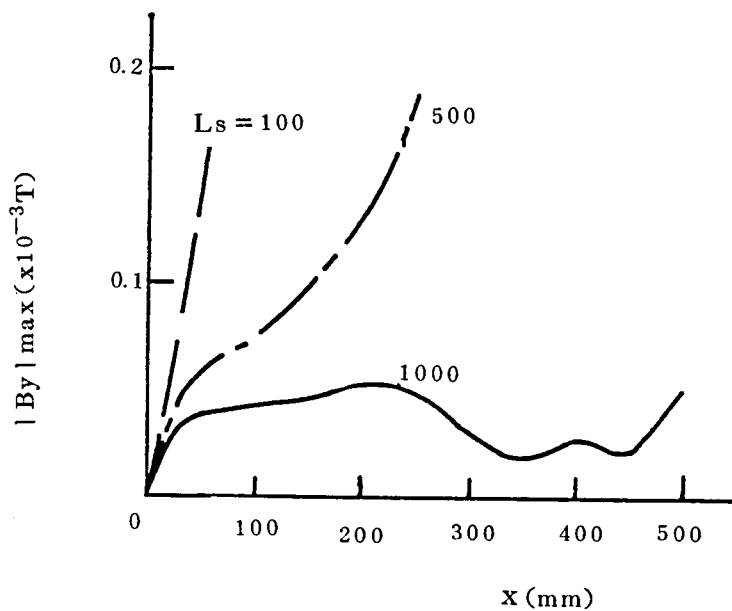
第 2.13 図に， $z$  方向の単位長当りの総損失，単位体積当りの平均損失を示す。板幅がある程度以上大きくなると平均損失はかえって減少している。これは，板幅が大きくなると渦電流による反作用磁界の影響でシールド板に鎖交する磁束が減少し，それに伴って渦電流も減少するからである。

第 2.14 図に，板幅  $L_s$  を  $1000(\text{mm})$  一定にした場合の，磁束密度の板に垂直な  $y$  方向成分の時間的な最大値  $|B_y|_{\text{max}}$  の分布を示す。板厚  $D_s$  が

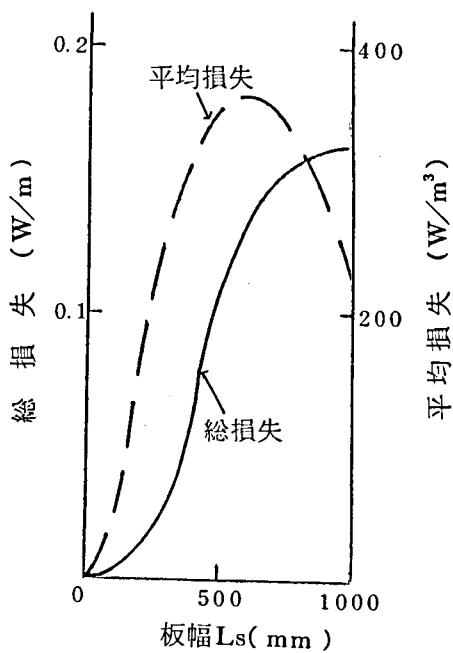
増加するほど  $|B_y|_{\max}$  は減少している。これは、板厚が大きくなると渦電流の通路の抵抗が等価的に小さくなるので、渦電流が増加し、従って、板厚が大きいほど反作用磁界が大きくなり、シールド板中を通る磁束が減少するからである。



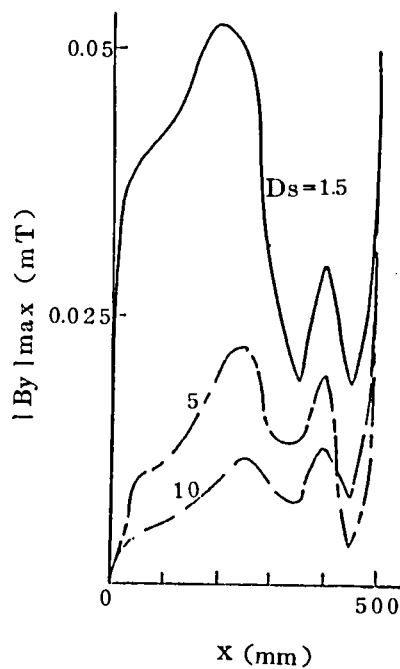
第 2.11 図 磁束分布



第 2.12 図 板幅による磁束分布の変化 ( $D_s = 1.5 \text{ mm}$ 一定)



第 2.13 図 板幅と総損失, 平均損失の関係 ( $D_s = 1.5 \text{ mm}$ 一定)



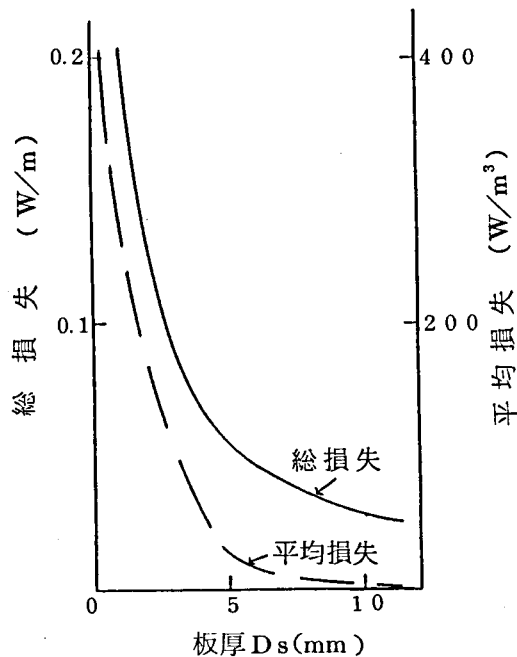
第 2.14 図 板厚による磁束分布の変化 ( $L_s = 1000 \text{ mm}$ 一定)

第 2.15 図に，板厚を変えた場合の  $z$  方向の単位長当りの総損失，単位体積当りの平均損失を示す。これより，総損失及び平均損失は板厚とともに減少することがわかる。

このようにシールド要素を用いれば，シールド板の板厚，板幅が全体の磁束分布や渦電流損に及ぼす影響を容易に検討できるため，この要素は，シールド板の最適設計のシミュレーションに極めて有用である。

また本要素は，三相一括形 GIS 母線<sup>(49)</sup>の容器内側のシールドの検討等にも有用である。

本要素の適用範囲については，文献<sup>(4)</sup>で詳述した。



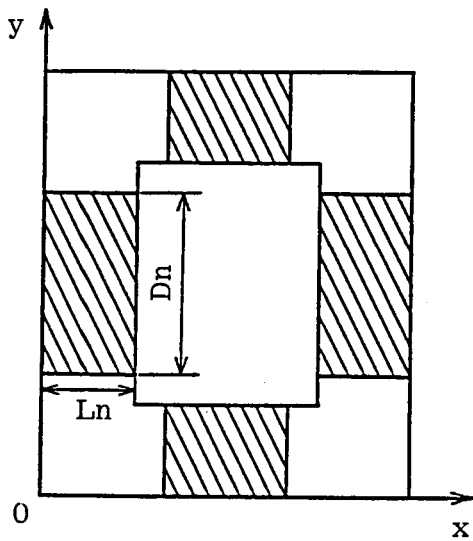
第 2.15 図 板厚と総損失，平均損失の関係  
( $L_s = 1000$  mm 一定)

## 2. 4 延長要素

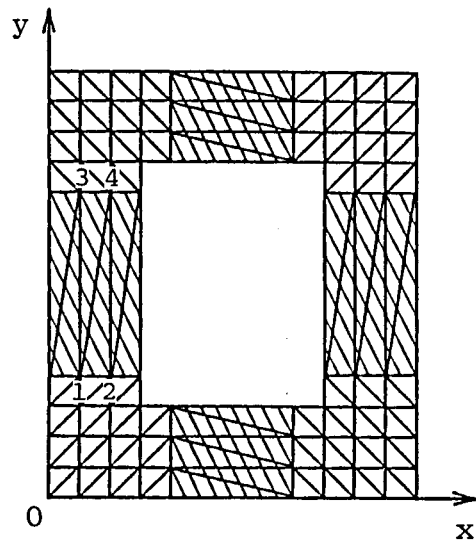
### 2. 4. 1 概 要

ギャップ要素やシールド要素の場合は，非常に狭い領域のエネルギーを線要素に持たせて取扱ったが，広い領域であっても電界や磁界がその領域内で一様であれば，この領域のエネルギーを1本の線要素に集約しても大きな誤差は生じないと考えられる。このような考えに立って，前章で述べた寸法修正要素に，電界や磁界が一様とみなせる領域のエネルギーを持たせたものが延長要素である。本要素をギャップ要素及びシールド要素と同様に，電界や磁界が特定方向にほとんど変化しない領域に使用すると，分割が容易で計算時間も短縮できる。

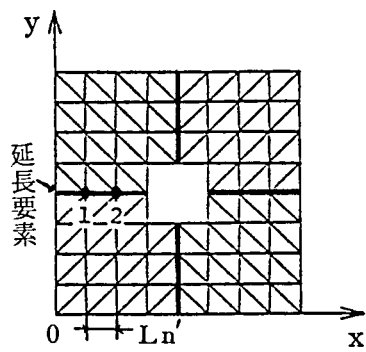
第 2. 16 図(a)に単相変圧器鉄心を示す。図に斜線で示している部分は，磁束分布がほとんど一様とみなせる脚部分で，その幅及び長さをそれぞれ  $L_n$  及び  $D_n$  とする。(b)，(c)図に，通常の三角形要素及び延長要素を用いた場合の分割図を示す。(a)図に斜線で示す脚中央部の磁束分布は  $y$  方向にほとんど変化しないので，(b)図の各節点 1 ～ 4 のポテンシャル  $A_1 \sim A_4$  の間にもギャップ要素やシールド要素の場合と同様，(2. 1) 式が成り立つと仮定できる。また斜線部の磁束分布は必要なく，この部分の長さがコーナ部の磁束分布に及ぼす影響を知りたいわけであるので，(b)図のように斜線部を要素分割する必要はない。そこで，これらの部分に延長要素を適用すれば，(c)図のようになる。(c)図の太線の部分が延長要素である。この要素は(a)図の斜線部と同じエネルギーを有するが，面積を持たない要素である。それゆえ，延長要素は前述のギャップ要素やシールド要素と同様な特長を持っている。



(a) 単相変圧器鉄心



(b) 三角形要素を用いた分割図



(c) 延長要素を用いた分割図

第 2.16 図 延長要素の説明図

## 2.4.2 定式化

領域の全エネルギー  $\chi$  を、次式のように成分に分解して考える。

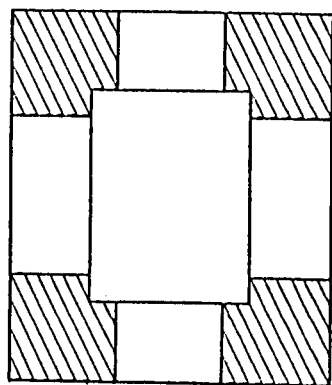
$$\chi = \chi_t^* + \chi_n \quad (2.18)$$

ここで、 $\chi_t^*$  は第 2.17 図(a)に斜線で示したように、延長要素を適用する領域以外の全領域のエネルギーを、また  $\chi_n$  は(b)図に斜線で示した延長要素を適用する領域のエネルギーであり、次式で計算される。

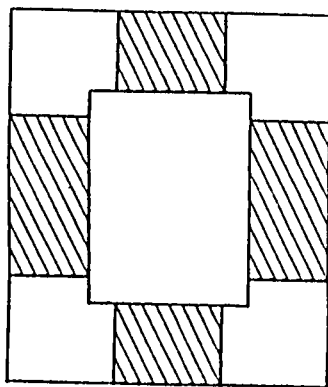
$$\chi_n = \frac{1}{2} \iint_{S_n} \left\{ \nu_y \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \nu_x \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (2.19)$$

ここで、 $\nu_x, \nu_y$  は  $x, y$  方向の磁気抵抗率、 $S_n$  は延長要素を適用する領域である。

(2.1) 式より、 $\partial A / \partial y = 0$  となるので、(2.19) 式は次式となる。



(a) 延長要素を適用する  
領域以外の領域



(b) 延長要素を適用する領域

第 2.17 図 領域のエネルギーの説明図

$$\chi_n = \frac{1}{2} \iint_{S_n} \nu_y \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (2.20)$$

上式が延長要素の有するエネルギーである。第 2.16 図(c)の延長要素 1-2 の有するエネルギー  $\chi_n^{(e)}$  は、節点 1, 2 のポテンシャルを  $A_1, A_2$  とすれば、(2.20)式より次式となる。

$$\chi_n^{(e)} = \frac{1}{2} \nu_y \left( \frac{A_1 - A_2}{L_n'} \right)^2 L_n' D_n \quad (2.21)$$

ここで、 $L_n'$  は第 2.16 図(c)に示したように、一つの延長要素の幅である。

結局、延長要素を用いた場合の節点 1, 2 に対する有限要素法の式は、(2.18)式に(2.21)式を代入し、これを  $A_1, A_2$  で偏微分することにより次式となる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial A_1} \\ \frac{\partial \chi}{\partial A_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_t^*}{\partial A_1} \\ \frac{\partial \chi_t^*}{\partial A_2} \end{bmatrix} + \sum_{Ri} \frac{D_n}{L_n'} \nu_y \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1e} \\ A_{2e} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

ここで、 $\partial \chi_t^* / \partial A_i$  ( $i = 1, 2$ ) は延長要素を適用する領域以外の全領域の有限要素法の式であり、 $A_{1e}, A_{2e}$  は一つの延長要素の 2 節点 1e, 2e のポテンシャルを示す。磁束分布が  $x$  方向に一樣な領域に延長要素を適用する場合は、上式の右辺第二項の  $\nu_y$  を  $\nu_x$  で置換えればよい。

方向性けい素鋼板は、磁化困難方向に比べ磁化容易方向に非常によく磁束を通すことができ、磁束の直進性がよいので、これを使用した鉄心内の磁束分布は一樣に近くなる。従って(2.1)式の条件をほぼ満足するので、方向性けい素鋼板を使用した鉄心の解析に延長要素を用いると、無方向性けい素鋼板を使用した鉄心に適用した場合に比べ

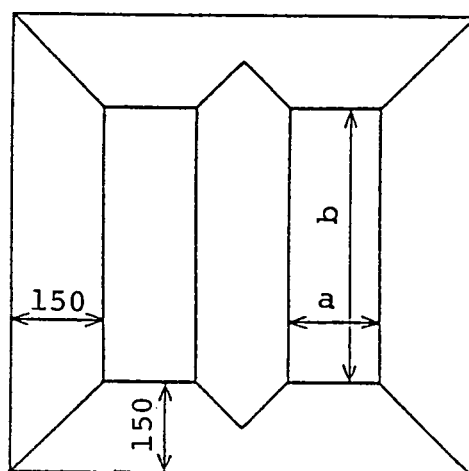


て誤差が少ない。

#### 2.4.3 本要素の有用性の検討

ここでは，延長要素を変圧器鉄心窓寸法が磁束分布に及ぼす影響の解析<sup>(2)</sup>に適用して，本要素の有用性の検討を行う。

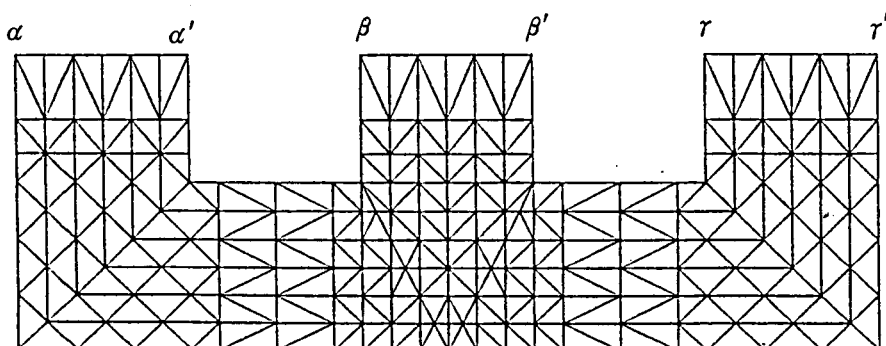
第 2.18 図の三相変圧器鉄心を用いて，窓比の違いが鉄心の磁気特性に及ぼす影響を検討する。ここで，窓比とは，図の窓寸法  $b$  と  $a$  の比と定義する。鉄心の材質は方向性けい素鋼板 G-10 とし，磁束密度は 1.7 (T) とした。



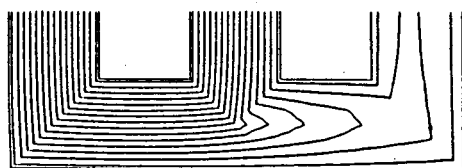
第 2.18 図 三相変圧器鉄心

第 2.19 図は窓比が 1.5 の分割図を示す。これ以上の窓比の鉄心について解析を行う際には，図の  $\alpha - \alpha'$ ， $\beta - \beta'$ ， $\gamma - \gamma'$  線上に延長要素を付加する。

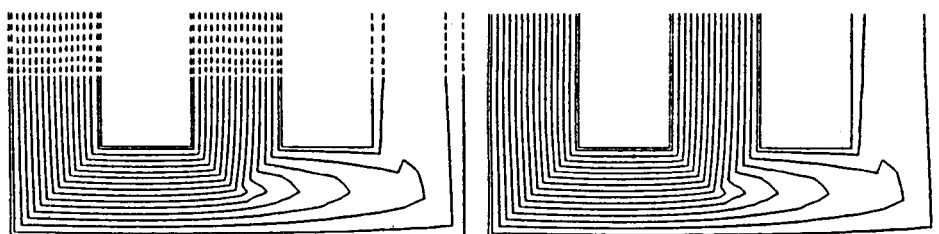
第 2.20 図に，一例として，窓比が 1.5，3，4.5 の場合の磁束分布の比較を示す。この図は，鉄心の左側の脚と中央脚中を通る磁束量が等し



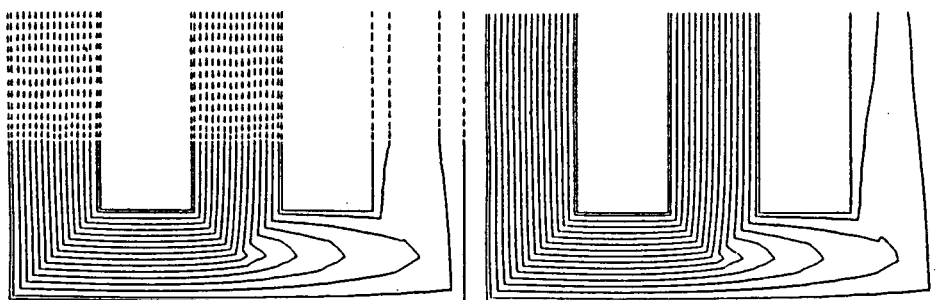
第 2.19 図 窓 比 1.5 の分割図



(a) 窓 比 = 1.5



(b) 窓 比 = 3



(c) 窓 比 = 4.5

第 2.20 図 窓 比 による 磁 束 分 布 の 変 化

い瞬間の磁束分布である。窓比が3及び4.5の場合には、(b)、(c)図のように図の右側に通常の有限要素法による解析結果を、左側に延長要素を適用した結果を示した。なお、図には延長要素を適用した領域の磁束分布を破線で示した。これより、延長要素を適用した結果は通常の有限要素法による結果と非常に良く一致することがわかる。また延長要素を用いた場合は、通常の有限要素法に比べて計算時間を約15%短縮することができた。このように、延長要素を用いれば、分割図を変更しなくても窓比による磁束分布の変化を手軽に解析することができる。

## 2.5 結 言

第1章で考案した寸法修正要素を、電気機器の磁気特性解析に適用するための手法について述べた。すなわち、寸法修正要素に電気機器内のギャップ、シールド板、磁束分布が一様な鉄心部分のエネルギーを持たせることにより、ギャップ、シールド等が機器の磁気特性に及ぼす影響を手軽にシミュレーションできる、ギャップ要素、シールド要素、延長要素なる新要素を考案した。

得られた結果を要約すると、以下のようになる。

- (1) これらの新要素を用いれば、分割図を修正することなく、任意の位置に容易にギャップやシールド等を設定することができる。
- (2) ギャップ長やシールド厚さの変更が容易であるため、これらの要素を用いれば、電気機器の最適形状のシミュレーションを極めて容易に行うことができる。
- (3) 電磁石の吸引力解析、電磁シールド効果の解析、変圧器鉄心窓寸法が磁気特性に及ぼす影響の検討に適用し、その有用性を示した。

### 第3章 単相誘導電動機の磁気特性解析

#### 3.1 緒言

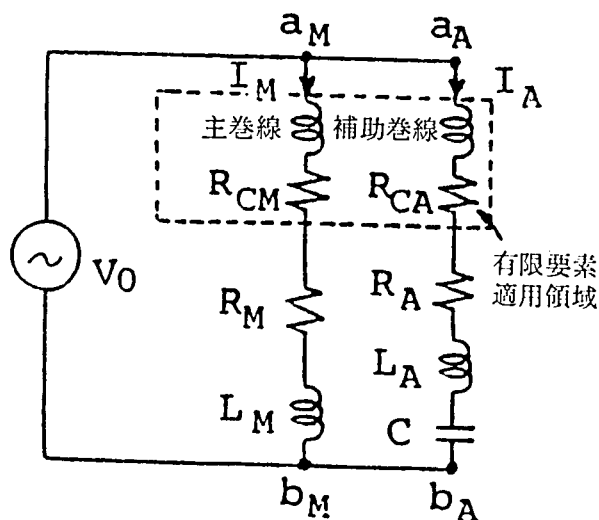
単相誘導電動機の解析においては，従来は等価回路的な解析<sup>(29)</sup>が主流であり，有限要素法を用いた詳細な磁気特性の解析はほとんどなく，回転子の二次電流，つまり回転子の二次導体に流れる渦電流の影響を無視して，回転子表面に正弦波磁束分布を与えた山田氏らの解析<sup>(30)</sup>が報告されている程度である。誘導電動機の磁束分布は二次電流により大きな影響を受け，かつこれはすべりにより大幅に変化するので，このような二次電流を無視した解析では，種々のすべりにおける正確な磁界解析を行うことはできない。このように，従来正確な単相誘導電動機の磁気特性解析が行われていなかった理由は，従来の有限要素法で，二次電流つまり渦電流まで考慮した解析はもちろん可能であるが，与えられた端子電圧下における単相誘導電動機の主巻線電流と補助巻線電流は通常前もってわかっていないため，電流を与えてベクトルポテンシャルを求める従来の有限要素法では解析が困難であるからである。

ところで，第1章で考案した外部電源を考慮した有限要素法を用いれば，所与の端子電圧下における磁束分布及び電流を鉄心の非線形性，渦電流まで考慮して正確に解析することができる。そこで，ここでは第1章で考案した新手法を用い，鉄心の非線形性，渦電流まで考慮して種々のすべりにおける磁束，電流及び鉄損分布の解析を行った。なお，ここでは損失の少ない鉄心の開発という観点に立って鉄心中の磁束及び鉄損分布を中心に結果の考察を行った。また，磁束分布については実験的検討も行った。但し，単相誘導電動機としては，コンデンサモータを取上げ，これについて検討する。

## 3.2 解析方法

### 3.2.1 単相誘導電動機の新しい解析法

単相誘導電動機が定電圧源に接続して運転されている場合の解析を有限要素法を用いて行うためには、外部の電源電圧や抵抗が、有限要素法で解析を行おうとする誘導電動機内の磁束や電流とどのような関係にあるかを把握しておかねばならない。この関係を求めるために、ここでは第 3.1 図のように、有限要素法を適用する領域以外の回路を等価回路的に取扱うことにする。図で  $L_M$ ,  $L_A$  及び  $R_M$ ,  $R_A$  は、それぞれ主巻線及び補助巻線端部の漏れインダクタンス、抵抗である。この端部の漏れインダクタンスは、第 1.6 図に示したような端部巻線からの漏れ磁束  $\Phi l_e$  によるインダクタンスである。また、 $C$  は静電容量、 $V_0$  は端子電圧である。図に破線で囲んだ有限要素適用領域が、有限要素法によりミクロな解析を行う領域である。端部巻線以外の巻線のイ



第 3.1 図 コンデンサモータの等価回路

インダクタンス分は有限要素法により正確に考慮される。しかしながら、主巻線及び補助巻線の抵抗分  $R_{CM}$ ,  $R_{CA}$  は、今回適用する有限要素法では考慮できないので、図ではこれらを集中定数として表した。

ここではまず、各部のベクトルポテンシャル  $A$ , 端子電圧  $V_o$ , 主巻線電流  $I_M$ , 補助巻線電流  $I_A$  間の関係式を求め、次に有限要素法の全体節点方程式を示し、最後に新しい解析法の式を導出することにする。

まず、主巻線部  $a_m$   $b_m$  間におけるベクトルポテンシャル, 端子電圧  $V_o$ , 電流  $I_M$  間の関係式を導出する。なお、この関係式の導出にあたっては、有限要素適用領域内ではベクトルポテンシャル, 抵抗等をミクロに、また有限要素適用領域外では集中定数回路的にマクロに取扱う。また、巻線は細線で構成されているので、巻線の表皮効果は無視できるものとする。

第 3.1 図のように、解析領域中の巻線が、解析領域外の電源  $V_o$ , インダクタンス  $L_M$  及び抵抗  $R_M$  に直列に接続されている場合、電圧  $V_o$  とベクトルポテンシャル  $A$ , 主巻線電流  $I_M$  の間には、( 1.5 ) 式の場合と同様に、キルヒホッフの第 2 法則に対応した次式の関係がある。

$$\frac{d}{dt} \int_{C_f} A ds + (R_{CM} + R_M) I_M + L_M \frac{dI_M}{dt} = V_o \quad ( 3.1 )$$

ここで、 $C_f$  は有限要素適用領域中の主巻線に沿った積分路、 $S$  は単位接線ベクトルである。上式の左辺第 1 項は、時間とともに主巻線との全鎖交数がいかに変わるかを示しており、この考えに忠実に、第 1 項を離散化することにする。

第 1.6 図の固定子巻線において、各々のコイルは並列導体ではなく、それぞれ 1 本の直列導体で構成されているものとする。また図のよう

に，スロット内の導体長さを $\ell$ とする。各導体をそれぞれ要素分割すれば，要素が非常に多くなり計算時間が相当かかるので，ここでは複数個の導体をまとめて1つの要素で表現する。要素としては一次三角形要素を用い， $n_M^{(e)}$ を主巻線の要素 $e$ 内の導体数， $n_{eM}$ を主巻線中の総要素数とすれば，(3.1)式は次式となる。

$$\ell \sum_{e=1}^{n_{eM}} n_M^{(e)} \rho^{(e)} \frac{dA_G^{(e)}}{dt} + (R_{CM} + R_M) I_M + L_M \frac{dI_M}{dt} = V_0 \quad (3.2)$$

ここで， $A_G^{(e)}$ は要素 $e$ の重心のベクトルポテンシャルであり，第1.16図に示したような一次三角形要素の3節点 $1e$ ， $2e$ ， $3e$ のポテンシャルを $A_{1e}$ ， $A_{2e}$ ， $A_{3e}$ とすれば次式で与えられる。

$$A_G^{(e)} = \frac{A_{1e} + A_{2e} + A_{3e}}{3} \quad (3.3)$$

また，各素線で定義される $\rho^{(e)}$ は，その積分の向きを決めることにより，+1または-1の値をとる。

(3.2)式の右辺を左辺に移項したものを $K_M$ とおき，これに(3.3)式を代入し，時間微分項を後退差分近似<sup>6)</sup>すれば次式となる。

$$K_M = \ell \sum_{e=1}^{n_{eM}} \frac{n_M^{(e)}}{3} \cdot \frac{\rho^{(e)}}{\Delta t} \sum_{j=1}^3 (A_{je}^t - A_{je}^{t-\Delta t}) + (R_{CM} + R_M) I_M^t + \frac{L_M}{\Delta t} (I_M^t - I_M^{t-\Delta t}) - V_0 = 0 \quad (3.4)$$

ここで，上付添字 $t$ ， $t - \Delta t$ は時刻 $t$ 及び $t - \Delta t$ における値であることを示す。

同様にして，補助巻線部 $aA$   $bA$ 間における(3.2)式に対応するベクトルポテンシャル，端子電圧，電流間の方程式は次式となる。

$$\left\{ \ell \sum_{e=1}^{n_{eA}} n_A^{(e)} \rho^{(e)} \frac{\partial A_G^{(e)}}{\partial t} (R_{CA} + R_A) I_A + L_A \frac{dI_A}{dt} + \frac{1}{C} \int I_A dt \right\} = V_0 \quad (3.5)$$

ここで、 $n_A^{(e)}$ は補助巻線の要素  $e$  内の導体数、 $ne_A$ は補助巻線中の総要素数である。補助巻線にはコンデンサ  $C$  が直列に接続されているため、上式左辺第 4 項のように時間積分項が現れる。このように、時間微分項と時間積分項が同一式中に存在すると取扱いが容易でないので、( 3.5 ) 式を時刻  $t$  でさらに一階微分することにより、時間積分項をなくすことにする。( 3.5 ) 式の右辺を左辺に移項し、時刻  $t$  で一階微分すれば次式となる。

$$\ell \sum_{e=1}^{ne_A} n_A^{(e)} \beta^{(e)} \frac{d^2 A_G^{(e)}}{dt^2} + (R_{CA} + R_A) \frac{d I_A}{dt} + L_A \frac{d^2 I_A}{dt^2} + \frac{1}{C} I_A - \frac{\partial V_0}{\partial t} = 0 \quad ( 3.6 )$$

( 3.6 ) 式の時間微分項を次式のように後退差分近似する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 A_G^{(e)}}{dt^2} &= \frac{A_G^{(e)t} - 2 A_G^{(e)t-\Delta t} + A_G^{(e)t-2\Delta t}}{\Delta t^2} \\ \frac{d I_A}{dt} &= \frac{I_A^t - I_A^{t-\Delta t}}{\Delta t} \\ \frac{d^2 I_A}{dt^2} &= \frac{I_A^t - 2 I_A^{t-\Delta t} + I_A^{t-2\Delta t}}{\Delta t^2} \end{aligned} \right\} \quad ( 3.7 )$$

但し、本解析においては外部電源の電圧波形は与えられており、これ関数形で書けば  $\partial V_0 / \partial t$  が求まるので、 $\partial V_0 / \partial t$  項は後退差分近似しなかった。( 3.6 ) 式に ( 3.3 )、( 3.7 ) 式を代入し、これに  $\Delta t$  を乗じたものを  $K_A$  とおけば、次のようになる。

$$\begin{aligned} K_A &= \ell \sum_{e=1}^{ne_A} \frac{n_A^{(e)}}{3} \cdot \frac{\beta^{(e)}}{\Delta t} \sum_{j=1}^3 (A_j e^{jt} - 2 A_j e^{j(t-\Delta t)} + A_j e^{j(t-2\Delta t)}) \\ &\quad + (R_{CA} + R_A) (I_A^t - I_A^{t-\Delta t}) + \frac{L_A}{\Delta t} (I_A^t - 2 I_A^{t-\Delta t} + I_A^{t-2\Delta t}) \\ &\quad + \Delta t \frac{1}{C} I_A^t - \Delta t \frac{\partial V_0^t}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad ( 3.8 )$$



( 3.4 ), ( 3.8 ) 式の関係式をまとめて書けば次式となる。

$$\begin{bmatrix} F_{1,1} & \cdots & F_{1,(n+2)} \\ F_{2,1} & \cdots & F_{2,(n+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} I_M \\ I_A \end{Bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_o \\ \Delta t \frac{\partial V_o}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

ここで、 $[F]$  は ( 1.7 ) 式の所で述べたように  $\{A\}$  ,  $\{I\}$  の係数マトリクス、 $n$  は未知節点数である。上式が、コンデンサモータの場合のベクトルポテンシャル、端子電圧、電流間関係式である。

次に、有限要素法の全体節点方程式を導出する。未知の電流は主巻線電流  $I_M$  と補助巻線電流  $I_A$  の 2 個であるので、( 1.4 ) 式において  $k = 2$  とすれば次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{1,1} & \cdots & H_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{n,1} & \cdots & H_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ \vdots & \vdots \\ C_{n,1} & C_{n,2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} I_M \\ I_A \end{Bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

ここで、 $[H]$  は全体第 2 係数マトリクス、 $[C]$  は電流の係数マトリクス、 $\{Q\}$  は既知のポテンシャル等の関数の列ベクトルである。

( 3.9 ) 式と ( 3.10 ) 式を連立させれば、次式のような外部電源を考慮した有限要素法の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{1,1} & \cdots & H_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{n,1} & \cdots & H_{n,n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ \vdots & \vdots \\ C_{n,1} & C_{n,2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} F_{1,1} & \cdots & F_{1,(n+2)} \\ F_{2,1} & \cdots & F_{2,(n+2)} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ I_M \\ I_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \\ V_0 \\ 4t \frac{\partial V_0}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

上式を解けば、ベクトルポテンシャル及び電流を直ちに求めることができる。

(3.11)式は別の表現をすれば、(3.12)式のようなエネルギー  $\chi$  を節点  $i$  のポテンシャル  $A_i$  で偏微分した式と、(3.4)、(3.8)式を連立させたものであるが、次に、これをニュートン・ラプソン法<sup>(7)</sup>を用いて非線形解析を行う手法について述べる。

$$\frac{\partial}{\partial A_i} \chi(A_1, \dots, A_n, I_M, I_A) = 0 \quad (3.12)$$

ここで、 $\chi(A_1, \dots, A_n, I_M, I_A)$  は領域のエネルギーがポテンシャル  $A_1, \dots, A_n$  及び電流  $I_M, I_A$  の関数であることを示す。上式において、ポテンシャル  $A_1, \dots, A_n$  及び電流  $I_M, I_A$  を未知数とし、多変数関数のテイラー展開すれば次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial A_i} \chi(A_1 + \delta A_1, \dots, A_n + \delta A_n, I_M + \delta I_M, I_A + \delta I_A) \\ &= \frac{\partial}{\partial A_i} \chi(A_1, \dots, A_n, I_M, I_A) \\ &+ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial A_i \partial A_j} \chi(A_1, \dots, A_n, I_M, I_A) \delta A_j + (\text{高次項}) \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial A_i \partial I_M} \chi(A_1, \dots, A_n, I_M, I_A) \delta I_M + (\text{高次項}) \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial A_i \partial I_A} \chi(A_1, \dots, A_n, I_M, I_A) \delta I_A + (\text{高次項}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

ここで、 $\delta A_j$ ,  $\delta I_M$ ,  $\delta I_A$  はポテンシャル及び電流の真値からずれた量を示す。前式において高次項を無視し、左辺を真値における値とし、変形すれば次式が得られる。

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \chi}{\partial A_i \partial A_j} \delta A_j + \frac{\partial^2 \chi}{\partial A_i \partial I_M} \delta I_M + \frac{\partial^2 \chi}{\partial A_i \partial I_A} \delta I_A = -\frac{\partial \chi}{\partial A_i} \quad (3.14)$$

ここで、 $\chi(A_1, \dots, A_n, I_M, I_A)$  を簡単のために  $\chi$  で表した。

また、(3.4) 及び (3.8) 式を、ポテンシャル  $A_1, \dots, A_n$  及び電流  $I_M, I_A$  を未知数として、テイラー展開すれば次式が得られる。

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial K_M}{\partial A_j} \delta A_j + \frac{\partial K_M}{\partial I_M} \delta I_M + \frac{\partial K_M}{\partial I_A} \delta I_A = -K_M \quad (3.15)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial K_A}{\partial A_j} \delta A_j + \frac{\partial K_A}{\partial I_M} \delta I_M + \frac{\partial K_A}{\partial I_A} \delta I_A = -K_A \quad (3.16)$$

ニュートン・ラプソン法により非線形反復する場合のポテンシャル及び電流の修正量  $\{\delta A_j\}$ ,  $\delta I_M$ ,  $\delta I_A$  は、(3.14), (3.15), (3.16) 式を連立させた次式を解くことにより求めることができる。

$$\begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial^2 \chi}{\partial A_i \partial A_j} \right\} & \left\{ \frac{\partial^2 \chi}{\partial A_i \partial I_M} \right\} & \left\{ \frac{\partial^2 \chi}{\partial A_i \partial I_A} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial K_M}{\partial A_j} \right\} & \frac{\partial K_M}{\partial I_M} & \frac{\partial K_M}{\partial I_A} \\ \left\{ \frac{\partial K_A}{\partial A_j} \right\} & \frac{\partial K_A}{\partial I_M} & \frac{\partial K_A}{\partial I_A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \delta A_i \right\} \\ \delta I_M \\ \delta I_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\{ -\frac{\partial \chi}{\partial A_i} \right\} \\ -K_M \\ -K_A \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

ここで、 $\frac{\partial^2 \chi}{\partial A_i \partial A_j}$ ,  $\frac{\partial^2 \chi}{\partial A_i \partial I_M}$ ,  $\frac{\partial^2 \chi}{\partial A_i \partial I_A}$  は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial A_i \partial A_j} &= \sum_{e=1}^{net} \left\{ \frac{2}{\Delta} \cdot \frac{\partial \nu^{(e)}}{\partial B^{(e)^2}} U_i^{(e)} U_j^{(e)} + \nu^{(e)} S_{ij}^{(e)} + \frac{\Delta \sigma}{12 \Delta t} (1 + \delta_{ij}) \right\} \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial A_i \partial I_M} &= - \sum_{e=1}^{net} \delta_i^{(e)} \frac{n_M^{(e)}}{3} \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial A_i \partial I_A} &= - \sum_{e=1}^{net} \delta_i^{(e)} \frac{n_A^{(e)}}{3} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

ここで， $net$  は領域中の総要素数， $S_{ij}^{(e)}$  はいわゆる要素係数マトリックスの要素<sup>(7)</sup>， $U_i = \sum_{j=1}^3 S_{ij}^{(e)} A_j$ ， $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。 $\nu^{(e)}$ ， $B^{(e)}$  は要素  $e$  の磁気抵抗率及び磁束密度， $\Delta$  は要素の面積である。また， $\delta_i^{(e)}$  は次式で定義される。

$$\delta_i^{(e)} = \begin{cases} 1 & (\text{節点 } i \text{ が要素 } e \text{ に含まれる時}) \\ 0 & (\text{節点 } i \text{ が要素 } e \text{ に含まれない時}) \end{cases} \quad (3.19)$$

$\frac{\partial K_M}{\partial A_j}$ ， $\frac{\partial K_M}{\partial I_M}$  等は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial K_M}{\partial A_j} &= \ell \sum_{e=1}^{neM} \frac{n_M^{(e)}}{3} \cdot \frac{\beta^{(e)}}{\Delta t} \delta_i^{(e)} \\ \frac{\partial K_M}{\partial I_M} &= (R_{CM} + R_M) + \frac{L_M}{\Delta t} \\ \frac{\partial K_M}{\partial I_A} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial K_A}{\partial A_j} &= \ell \sum_{e=1}^{neA} \frac{n_A^{(e)}}{3} \cdot \frac{\beta^{(e)}}{\Delta t} \delta_i^{(e)} \\ \frac{\partial K_A}{\partial I_M} &= 0 \\ \frac{\partial K_A}{\partial I_A} &= (R_{CA} + R_A) + \frac{L_A}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{C} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

### 3. 2. 2 座標軸の取り方についての検討

コンデンサモータの固定子巻線は通常細線で構成されているので、固定子巻線には渦電流は流れないとして取扱っても大きな誤差は生じない。それに対し、回転子導体には二次電流つまり渦電流が流れるとして扱う必要があるが、このような運動している導体に流れる渦電流を取扱う際、座標軸を回転子上に取るか固定子上に取るかによって、基礎方程式が異なってくる。

座標軸を固定子上に取った場合、( 1. 1 ) 式の渦電流密度  $\mathbf{J}_e$  は次式で与えられる<sup>69)</sup>。

$$\mathbf{J}_e = \sigma \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \right) \quad ( 3. 2. 2 )$$

ここで、 $\phi$  は電位、 $\mathbf{V}$  は回転子導体の速度である。このように、渦電流密度に速度起電力  $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$  が含まれている場合は、有限要素法の全体係数マトリクスが非対称となり<sup>69)</sup>、計算機の記憶容量及び計算時間が増大して不都合である。それに対し、座標軸を回転子上にとれば、その座標軸に対する回転子導体の速度  $\mathbf{V}$  は零となるので、上記のような不都合は生じない。この際、もし回転子を固定して、固定子を相対的に回転させて解析を行おうとすれば、固定子を各時間ステップ  $\Delta t$  ずつ回転させた分割図が必要であるが、巻線側が回転するため、( 3. 4 ) 式や ( 3. 8 ) 式のような固定子巻線の回路におけるベクトルポテンシャル、電流、端子電圧間の関係式を求める際の巻線に関するデータの処理が複雑となる。そこで、ここでは固定子は固定させて、座標軸を取った回転子側を回転させることにする。その際、3. 2. 1 で述べた時間幅  $\Delta t$  は回転子が1スロットピッチ分だけ回る時間とした。従ってこの場合は、スロットリプルまで考慮した解析は行えない。回転子を1ス

ロットピッチずつ回転させた場合，スロット数を  $ns$ ，周波数を  $f$  (Hz) とすれば，すべり  $S$  における時間幅  $\Delta t$  は次式より求まる。

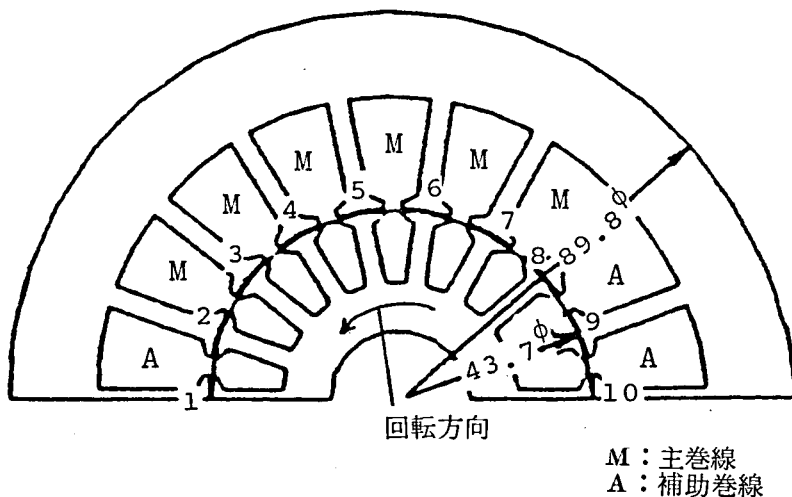
$$\Delta t = \frac{1}{f \cdot ns \cdot (1-S)} \quad (3.23)$$

なお，本解析では，上述のように回転子を回転させて解析を行うので，最初，初期値を与えておき，定常状態になるまで計算を行わねばならない。次の 3.3 節で述べる解析では，定常状態になるまで 4 ～ 5 周期の計算が必要であり，計算時間は，日本電気製 ACOS700S で約 400 (秒) であった。

### 3.3 解析及び検討

#### 3.3.1 解析モデルと解析条件

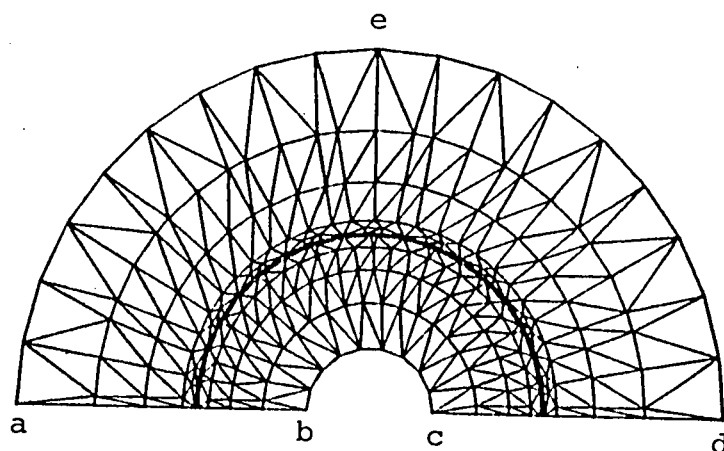
第 3.2 図に，解析に用いたコンデンサモータの構造及び寸法を示す。定格は 100 (V)，170 (W)，60 (Hz) の 2 極機であり，無負荷時及び定格負荷時のすべり  $S$  はそれぞれ 0.0058，0.05 である。なお，回転方



第 3.2 図 構造及び寸法

向は図示したように反時計方向である。固定子及び回転子のスロット数はともに 18 である。なお、実機では始動トルクの関係から、回転子と固定子のスロット数が異なるのが通常であり、この場合はそれぞれ 17, 18 であるが、いわゆる周期境界条件<sup>(7)</sup>を適用して計算領域を 1 極分ですませれるように、回転子のスロット数を極数で割りきれぬ 18 とした。但し、全スロットの総断面積は実機と同じになるようにした。鉄心の材質は、0.5 (mm) 厚の無方向性けい素鋼板 S-23 であり、回転子はアルミニウムダイカスト製である。二次導体の導電率は、短絡環の抵抗を考慮して、 $0.1555 \times 10^8$  (V/m) とした。主巻線及び補助巻線は同心巻であり、ターン数はそれぞれ、326, 450 である。補助巻線には、11 ( $\mu$ F) のコンデンサが直列に接続されている。第 3.2 図中の番号は、歯先端に巻かれた磁束分布測定用サーチコイルの番号を示す。

第 3.3 図に分割図を示す。この分割図は、会話型自動データ作成プログラム<sup>(8)</sup>を用いて作成した。境界 a-b, d-c は周期境界<sup>(7)</sup>とした。また、固定子鉄心の外周及び回転子鉄心の内周からは磁束が漏れ



第 3.3 図 分 割 図

ないと仮定しても大きな誤差は生じないと考えられるので、境界  $b - c$  ,  $a - e - d$  は固定境界<sup>(7)</sup>とし、そのベクトルポテンシャルを零とした。周期境界条件を用いる場合は、通常係数マトリクスのバンド幅が非常に大きくなるが、周期境界条件を考慮した節点番号の最適化手法<sup>(8)</sup>を用いて記憶容量及び計算時間の短縮をはかった。

### 3. 3. 2 磁束分布及び磁束密度波形

#### (1) 磁束分布

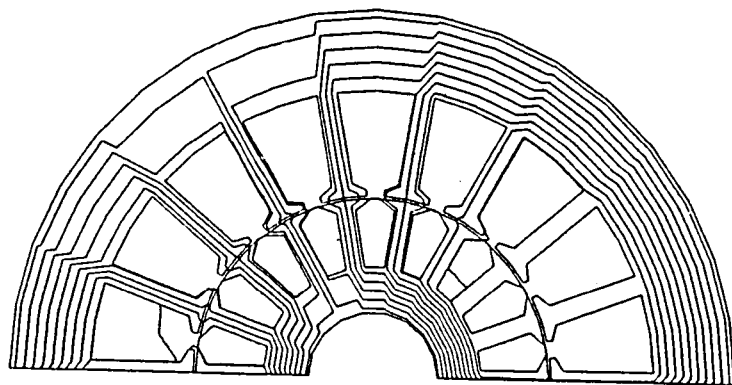
第 3. 4 図に、 $\omega t = 90^\circ$  の場合の  $S = 0.0058$  ,  $0.05$  ,  $1.0$  における磁束分布の計算結果を示す。時間基準は印加電圧が零になる瞬間をとった。これらの図より、無負荷時  $S = 0.0058$  と定格負荷時  $S = 0.05$  の磁束分布はほとんど同じであるが、始動時  $S = 1.0$  の場合の磁束の流れの経路は、無負荷時や定格負荷時のそれらとは全く異なっていることがわかる。すなわち、定格負荷時に回転子導体に流れる電流による反作用磁界はわずかであるため、定格負荷時の磁束分布は無負荷時のそれとほとんど同じであり、両者とも磁束が固定子及び回転子鉄心歯部を通り抜け、鉄心背部を流れる分布となっている。それに対し、始動時には回転子導体にかんりの二次電流が誘導されて大きな反作用磁界が生じ、これにより固定子巻線によって作られる磁束の半径方向成分が打消される結果、磁束が固定子及び回転子歯の先端を円周方向に走る分布となる。また、反作用磁界のため、磁束がある歯(第 3.4 図(c)の例では、第 3. 2 図の歯 2 及び 8 )に集中している。回転子表面に集中しようとする磁束は、この部分に磁気飽和を生じさせるため、図のように回転子や固定子スロットを横切る磁束も存在している。

#### (2) 磁束密度の時間的な最大値の分布

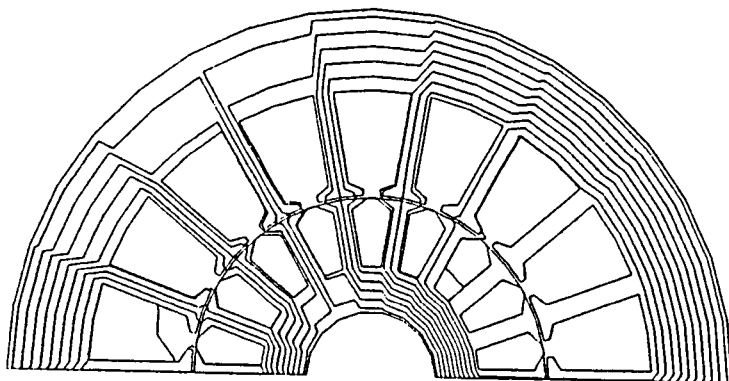
第 3. 5 図に、第 3. 2 図の各固定子歯における磁束密度の時間的な最



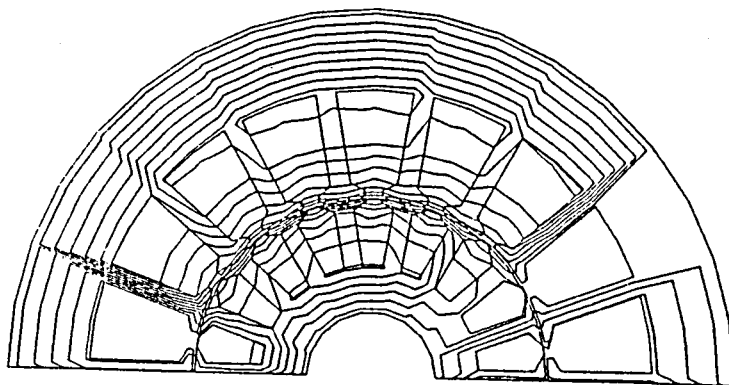
大値の分布を示す。図には測定値も斜線で示した。この場合，例えば，番号 1 の歯の位置は，第 3.2 図に示すように主巻線を中心軸付近



(a)  $S = 0.0058$

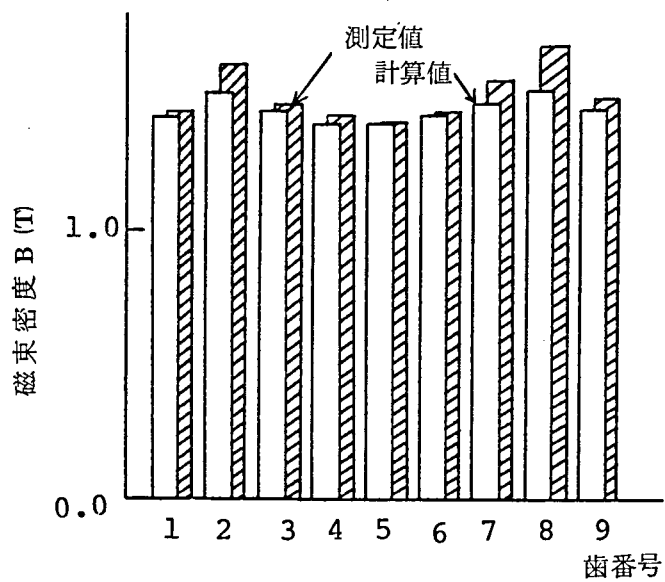


(b)  $S = 0.05$

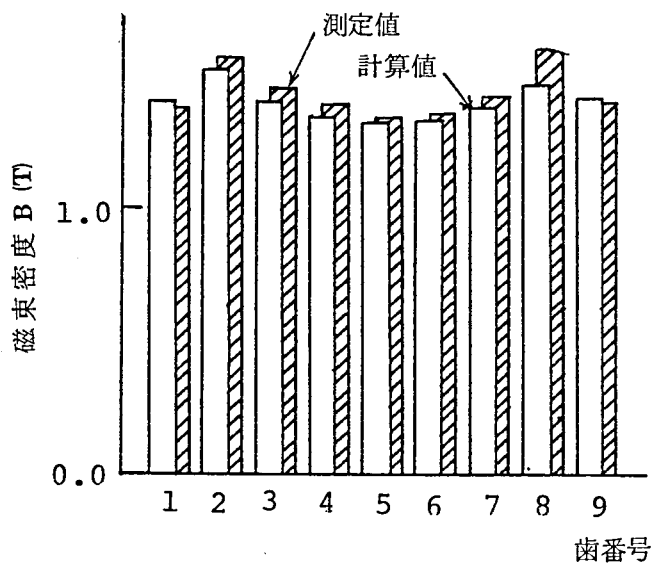


(c)  $S = 1.0$

第 3.4 図 磁 束 分 布



(a)  $S = 0.0058$



(b)  $S = 0.05$

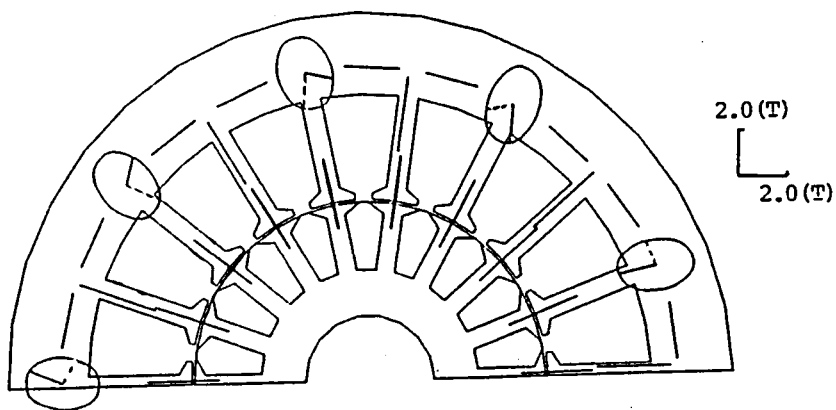
第 3.5 図 固定子歯部の磁束密度の  
時間的な最大値の分布

に対応している。二次導体に流れる電流による反作用磁界が異なるため、無負荷時  $S = 0.0058$  の場合の方が磁束密度がわずかに大きくなっている。また、磁束密度の時間的な最大値は歯によって異なっており、特に第 3.2 図のように主巻線と補助巻線の境界に位置する歯 2 と 8 において、磁束密度が大きくなっていることがわかる。これは、いわゆる相帯漏れ磁束がこの付近で顕著に現れるためである。このように、歯によって磁束密度の大きさが異なると、各歯に発生する鉄損の大きさが異なるばかりでなく、ギャップ磁束に異常な空間高調波が発生し、これにより回転子表面損及び騒音が増大することが考えられる。第 1 章で考案した寸法決定法を導入した有限要素法を用いれば、各歯の磁束密度の時間的な最大値が同じになるような歯及びスロット寸法の決定が可能であり、これについては今後の検討が待たれる。

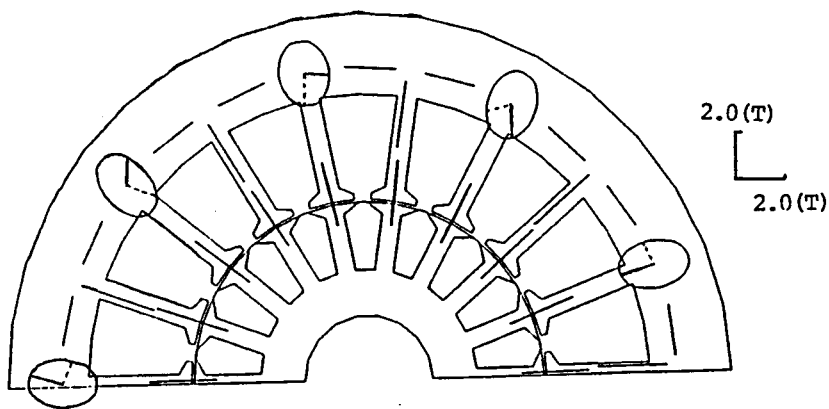
### (3) 回転磁束分布

第 3.6 図に、鉄心各部の回転磁束<sup>68,69,40</sup>の計算結果を示す。これは、鉄心各部の点における磁束密度ベクトルの先端が時間の経過とともに描く軌跡を図示したものである。回転磁束中の実線及び破線は、それぞれ  $\omega t = 0^\circ$  及び  $90^\circ$  における磁束密度ベクトルを示す。回転磁束が生ずる箇所では、交番磁束よりも大きな鉄損が一般に発生するため、鉄損の少ない鉄心の検討を行う際には、この鉄心内の回転磁束について詳細な知見を得ておく必要がある。

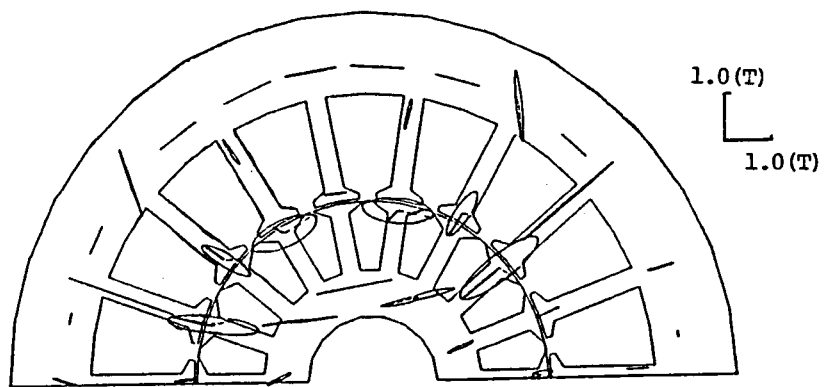
第 3.6 図(a), (b)より、すべりの小さな無負荷時  $S = 0.0058$  や定格負荷時  $S = 0.05$  では、固定子歯を通る磁束はほとんど半径方向の交番磁束になっているが、固定子歯の背部では、軸比が 1 に近い大きな円回転磁束を生じていることがわかる。ここで、軸比<sup>69</sup>とは次式で定義される値で、これはだ円の形状を最もよく表し、これが 0 のと



(a)  $S = 0.0058$



(b)  $S = 0.05$



(c)  $S = 1.0$

第 3.6 図 回転磁束分布

きは交番磁束を，また 1 のときは円磁束を表す。

$$\text{軸比} = \frac{\text{だ円の短軸}}{\text{だ円の長軸}} \quad (3.24)$$

固定子歯を通る磁束が半径方向の交番磁束になるのは，第 3.4 図の磁束分布の所で述べたように，すべりの小さい場合は，磁束が常に固定子歯を半径方向に通るからである。また，固定子歯の背部で軸比が大きなだ円回転磁束が生じる理由は，次のようになる。すなわち，第 3.4 図(a)，(b)の磁束分布は，時間とともに反時計方向に回転する。それゆえ，歯の背部の 1 点に着目すれば，この点の磁束密度ベクトルの時間的变化は，1 スロットピッチずつ離れて対応する点の磁束密度ベクトルを連ねたものとはほぼ等価である。第 3.4 図(a)，(b)をみれば，歯の背部の磁束密度ベクトルの大きさはどの歯の背部でもほぼ同じであり，かつそのベクトルの向きは，順次少しずつ同じ方向に回転したものとなっている。それゆえ，歯の背部では軸比が大きなだ円回転磁束となるのである。また，第 3.6 図(a)，(b)より，歯の背部の磁束密度ベクトルは時計方向に回転することがわかる。このように，歯の背部のミクロな磁束の回転方向は，回転子の回転方向，つまり主巻線及び補助巻線の作るマクロな磁束のそれとは反対になる。

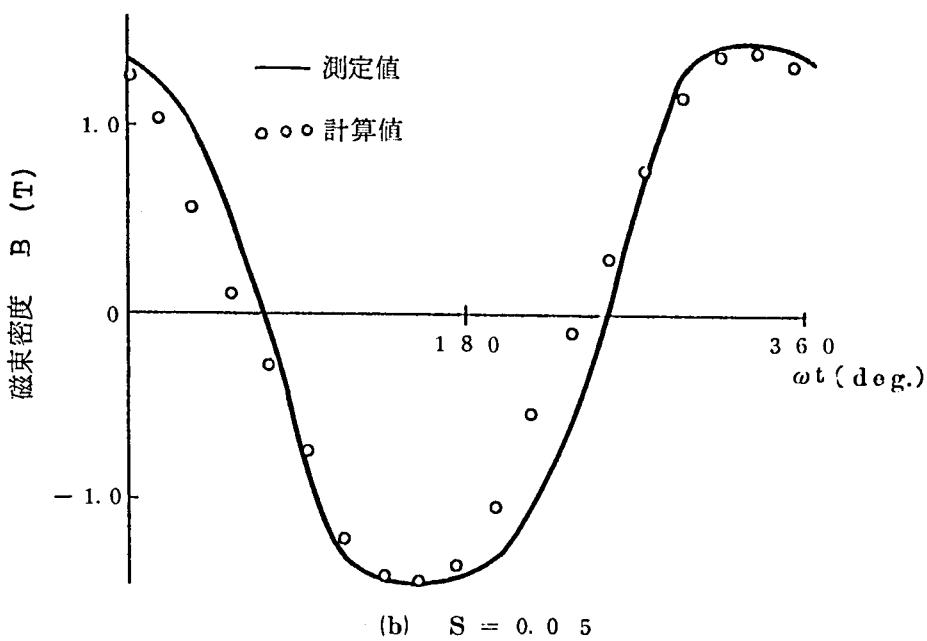
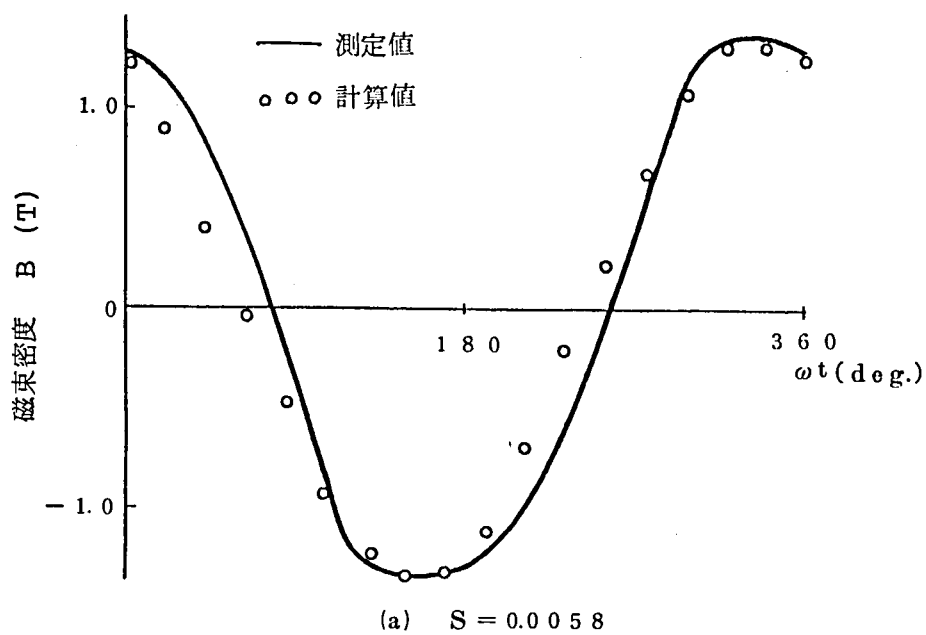
それに対し，すべりの大きな始動時  $S = 1.0$  では，すべりの小さい無負荷時や定格負荷時の場合と異なり，固定子歯の先端部でだ円回転磁束を生じ，歯の背部ではほとんど交番磁束になっている。このように，歯の先端部でだ円回転磁束が生じるのは，第 3.4 図(c)のように，磁束が固定子ヨーク，固定子歯，固定子と回転子の歯端を通る分布となるため，ある一つの固定子歯の先端部の磁束に着目した場合，ある瞬間には磁束が半径方向に，またある瞬間には円周方向を向くため

ある。そして、第 3. 2 図の歯 5 を境として、右側と左側の固定歯の先端部の磁束の回転方向は互いに逆になっている。歯の背部でほとんど交番磁束になるのは、すべりが大きいと、いわゆる逆相回転磁界が大きくなるため、主巻線と補助巻線によって作られるだ円回転磁界がへん平になるためである。すべりの小さい無負荷時や定格負荷時には、第 3. 6 図(a), (b)のように、だ円回転磁束は 1 スロットピッチごとにほぼ同じであったのに対し、始動時の  $S = 1$  では、各歯によって異っている。これは、第 3. 5 図の所で述べた相帯漏れ磁束が、始動時に顕著に現われ、第 3. 4 図(c)のように磁束分布が特定の箇所には片寄ったためである。

以上のように、単相誘導電動機鉄心内のミクロな回転磁束の検討を行った結果、各部の磁束の回転方向はマクロな全体としての磁束の回転方向と逆であり、また鉄心中の場所により、回転磁束の軸比が相当変化していること等が明らかになった。これらの知見は、有限要素法による磁束のミクロな解析を行って始めて得られるものであり、従来のようなマクロな観点に立った回転磁束の理論<sup>(5)</sup>からは得られない。

#### (4) 磁束密度波形

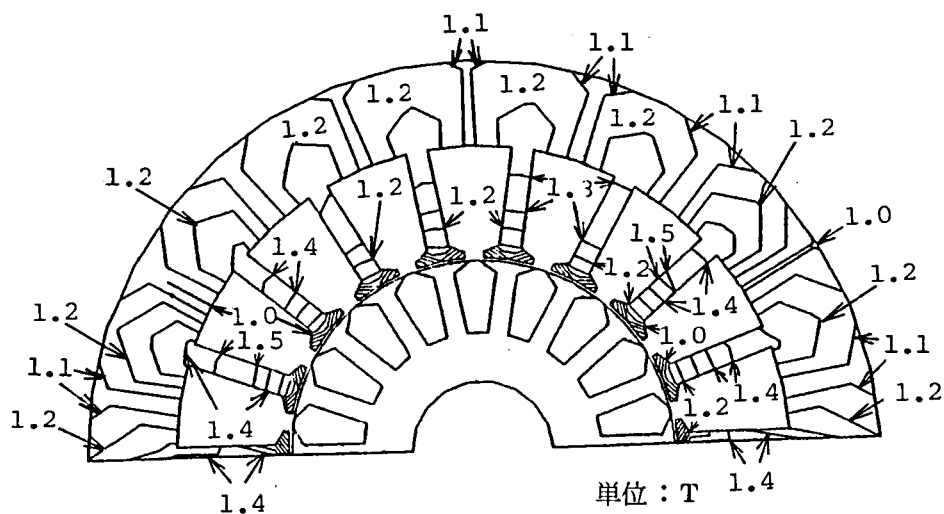
第 3. 7 図に、第 3. 2 図の歯 1 の磁束密度波形を示す。計算値は○印で、また測定値は実線で示した。この波形にリップル分が入らないのは、3. 2. 2 で述べたように、今回の解析では回転子を 1 スロットピッチずつ回転させ、かつ回転子と固定子のスロット数が等しいため、回転子鉄心と固定子鉄心の相対位置が変化しないからである。これによれば、すべり  $S$  が  $0 \sim 0.05$  の範囲では、ほとんど歯部の磁束密度波形は変化しないことがわかる。



第 3.7 図 歯 1 の磁束密度波形

### (5) 等最大磁束密度線図

鉄損のうち、ヒステリシス損に最も影響するのは磁束密度の時間的な最大値である。第 3.8 図に、定格負荷時  $S = 0.05$  における等最大磁束密度線図の計算結果を示す。これは、各要素における磁束密度の時間的な最大値を求め、その等しい点を結んだものである。その描き方は文献(7)に詳述した。図中の数字は磁束密度(単位: T)であり、等最大磁束密度線は 0.1(T)ごとに描いた。これより、歯及び歯の背部



第 3.8 図 等最大磁束密度線図 ( $S = 0.05$ )

の磁束密度が大きく、この付近でかなり鉄損が発生していることが推察される。また、スロット背部や歯の先端部では磁束密度が小さくなっている。定格負荷時を選んだ理由は、本論文は損失の少ない鉄心の開発という観点に立っており、誘導電動機の鉄損としては通常この状態におけるものを取扱えばよいからである。なお、無負荷時における等磁束密度線図は第 3.8 図とはほぼ同じであるが、第 3.5 図の所でも述べたように、無負荷時の場合の方がわずかに磁束密度が大きい分布と



なる。

### 3. 3. 3 鉄損分布

有限要素法により各要素の磁束密度波形が求まるが，その大きさ，ひずみの程度及び磁束の方向は要素によってさまざまである。ここでは，求まった磁束密度波形を用いて，各要素ごとに鉄損を計算し，鉄心内の鉄損分布の考察を行う。

#### (1) 鉄損算定法

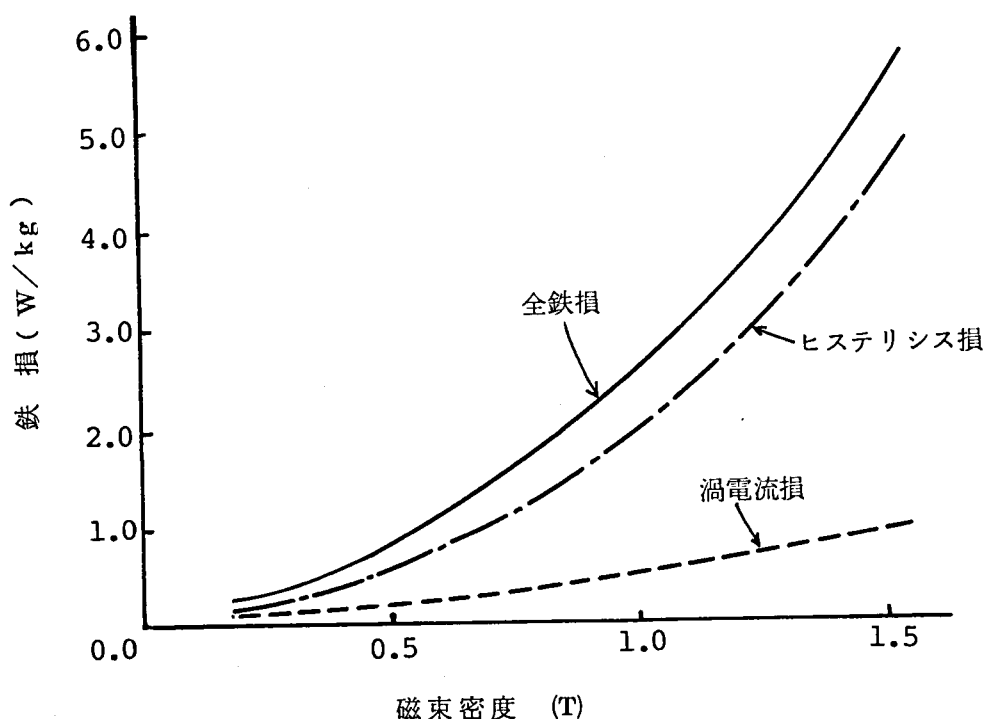
第 3. 6 図からわかるように，鉄心中には軸比の比較的大きな円回転磁束が生じているが，これによる鉄損は，回転磁束を形成する  $x$  及び  $y$  方向のひずみ波交番磁束による鉄損の和として求めた。<sup>(42,43)</sup> なお，ひずみ波交番磁束による鉄損  $W$  は，次式を用いて計算した。<sup>(41)</sup>

$$W = W_h(B_m) + W_e(B_{eff}) \quad (3.25)$$

ここで， $W_h(B_m)$  は，ヒステリシス損が最大磁束密度  $B_m$  の関数  $W_h$  で表されることを，また  $W_e(B_{eff})$  は，渦電流損が実効値磁束密度  $B_{eff}$  の関数  $W_e$  で表されることを示している。なお，実効値磁束密度  $B_{eff}$  は，ひずみ波の実効値電圧と等しい実効値電圧を示す正弦波の最大磁束密度であり，高調波の振幅，次数をそれぞれ  $B_n$ ， $n$  とすれば，次式で定義される。

$$B_e = \sqrt{\sum (n B_n)^2} \quad (3.26)$$

$W_h$ ， $W_e$  については，エプスタイン試験器を用いてひずみ波法<sup>(41)</sup>により鉄損分離を行った。第 3. 9 図にその結果を示す。これらのヒステリシス損及び渦電流損を計算機に記憶させて，鉄損計算を行った。

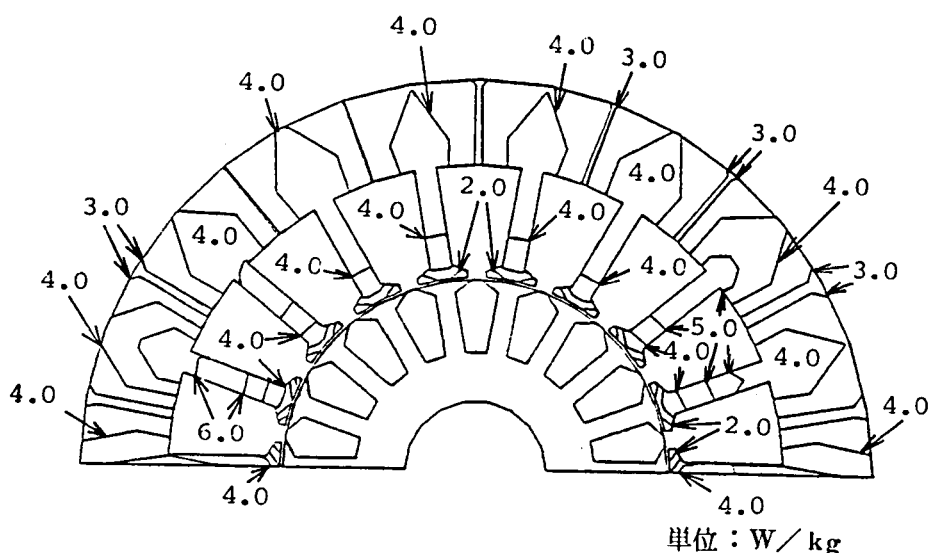


第 3. 9 図 鉄損曲線 ( S-23, 0.5mm 厚, 60Hz )

## (2) 等鉄損線図

第 3. 1 0 図に，定格負荷時  $S = 0.05$  における固定子鉄心中の等鉄損線図を示す。これは等最大磁束密度線図の場合と同様に，各要素における鉄損の等しい点を結んだものである。図中の数字は鉄損（単位： $W/kg$ ）を示しており，等鉄損線は  $1.0 (W/kg)$  ごとに描いた。第 3. 8 図で固定子歯及び固定子歯の背部で磁束密度の時間的な最大値が大きくなっていたのに対応して，これらの部分の鉄損が他よりも大きくなっている。特に，第 3. 2 図の歯 2 及び歯 8 のように，主巻線と補助巻線の境界の歯で鉄損が最大になっている。これは第 3. 5 図で述べたように，相帯漏れ磁束のために，これらの歯の磁束密度の時間的な

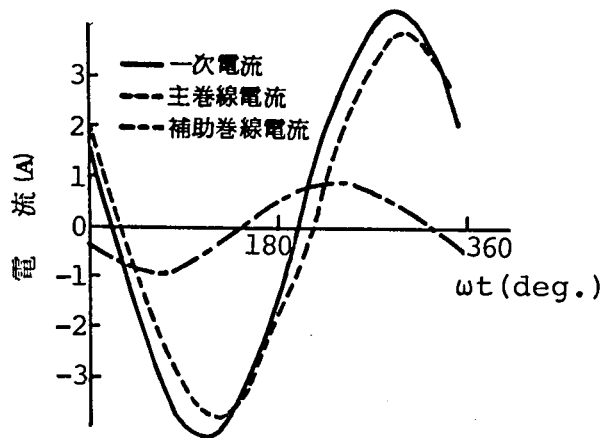
最大値が他の歯よりも大きくなるためである。また、鉄損が少ないのは、固定子歯の先端とスロットの背部である。第 3. 8 図の場合と同様に、無負荷時の等鉄損線図も定格負荷時のそれとほぼ同じであった。このように、有限要素法を用いれば鉄損分布の詳細が明らかになり、どの部分の寸法を変更すれば、材料費を少なくして、かつ鉄損を減らすことができるかがわかるので、鉄損の少ない鉄心の最適設計に有用な指針を与えることができる。



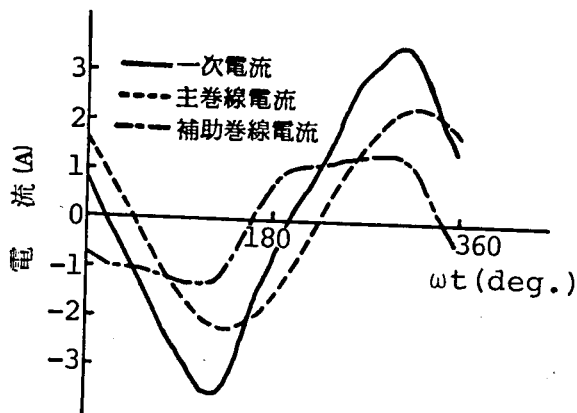
第 3. 10 図 等鉄損線図 ( $S = 0.05$ )

#### 3. 3. 4 電流波形

(3.11) 式をみればわかるように、本解析法を用いれば所与の端子電圧を満足する磁束分布と同時に、電流波形も求めることができる。第 3.11 図に、定格負荷時の電流波形の計算値と測定値の比較を示す。計算値と測定値はかなり異なっているが、これの原因としては、鉄心のヒステリシスを考慮していないこと、前述のように回転子のスロット数が実機と異なっていること及び磁気飽和がある場合は、磁束密度のわずかな誤差に



(a) 計算値



(b) 測定値

第 3.11 図 定格負荷時の電流波形 ( $S = 0.05$ )

より電流に大きな誤差が現れることなどが考えられる。なお，鉄心の磁束密度を 5 (％) 小さくした場合の計算を行った結果，電流は約 20 (％) 減少した。これより，磁束密度の誤差がかなり電流値に影響を与えることがわかる。

トルク波形ももちろん計算可能であるが，電流にかなりの誤差を生じているので，ここではトルクまでの計算は行わなかった。

### 3.4 実験的検討

既製のコンデンサモータを利用して実験的検討を行った。回転子にはスキューが設けられている。磁束分布測定用のサーチコイルは、直径 $0.1(mm)$ のホルマール線を2ターンずつ、すべての歯の先端に設けた。実験にあたっては、コンデンサモータを渦電流制動機に結合し、それを負荷としてすべりを変化させ、各歯の磁束密度波形を測定した。

第3.1 1図のように電流にかなり誤差が生ずるのに対し、磁束密度の計算値と測定値は、第3.5図、第3.7図のように比較的良く一致している。これは、本解析法が電圧を与える方法であるため、電圧にほぼ対応する磁束は比較的良く一致するからである。それゆえ、磁束分布より鉄損を求め、この鉄損が少なくなるような鉄心形状の検討を行う際に、本手法は有用である。

### 3.5 結 言

外部電源を考慮した有限要素法を用いて単相誘導電動機の解析を行い、磁束及び鉄損分布の詳細を明らかにするとともに、磁束については実験と比較した。

本章で明らかになった事項は以下のとおりである。

- (1) 外部電源を考慮した有限要素法を用いれば、従来不可能であった単相誘導電動機のミクロな磁気特性解析が可能である。すなわち、磁束及び鉄損分布を詳細に求めることができ、損失の少ない鉄心を設計するための有用な知見を得ることができる。
- (2) 無負荷時や定格負荷時においては、固定子歯の背部で、軸比（短軸／長軸）が1に近い大きな回転磁束を生じているので、この付近でかなり鉄損が発生する。

- (3) 主巻線と補助巻線の境界に位置する固定子歯では，相帯漏れ磁束のために磁束密度が高くなり，他の固定子歯より鉄損が多く発生している。
- (4) 磁束分布の計算結果は測定結果と比較的良く一致し，本手法が単相誘導電動機の磁束分布の解析法として妥当であることがわかった。

以上述べたように，印加電圧から直接，電流及び磁束分布を計算できる手法の開発により，有限要素法を用いる誘導電動機の数値解析技術は，実用化に向って大きく一歩前進したと考える。今後の課題としては，計算時間を短縮するための時間周期有限要素法<sup>6)</sup>の導入，電流の計算精度の向上が上げられる。

## 第4章 三相誘導電動機の磁気特性解析と 実験的検討

### 4.1 緒言

損失の少ない誘導電動機鉄心の設計を行うためには、どれだけの大きさの鉄損がどこで発生しているか等のいわゆる鉄心のミクロな磁気特性を詳細に把握しておく必要がある。従来、歯部の磁束分布や、鉄心全体の鉄損の測定は行われていたが、鉄心各部に発生する回転磁束や局所的な鉄損についてはほとんど測定が行われていない。更に、外部の定電圧源に接続して運転される電気機器に対する有力な解析法もないため、従来実験的にも解析的にも十分な検討がなされていない。

第1章では、外部の定電圧源に接続して運転される電気機器に対する解析法として、外部電源を考慮した有限要素法を考案し、第3章で既に、この手法を单相誘導電動機の磁気特性解析に適用し、詳細な知見を得た。本章では、この手法を三相誘導電動機の磁気特性解析に適用して、鉄心中の磁束分布、だ円回転磁束分布及び鉄損分布を解析し、それらが鉄心の磁束密度及びすべりに対してどのような特性を有するかを明らかにした。

次に、鉄心中の磁束分布及び鉄損分布を精密に測定するためのモデルを製作した。なお、モデル誘導電動機は、測定の簡便さという観点から、静止状態において、負荷運転時ならびに無負荷運転時が模擬できるように考慮した。そして各部の磁束波形、回転磁束及び鉄損分布の測定を行った。

モデル誘導電動機の磁束、だ円回転磁束及び鉄損分布の測定結果を有限要素法による解析結果と比較することにより、測定結果の更に詳細な

考察を行った。

## 4. 2 解析及び検討

### 4. 2. 1 解析モデルと解析方法

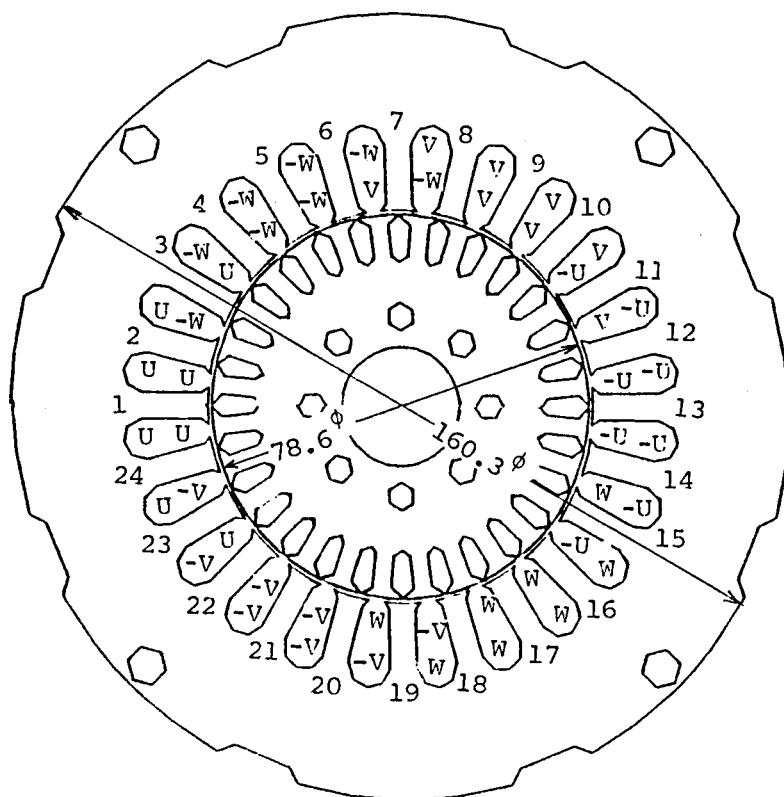
第 4. 1 図(a)に、解析に用いた三相誘導電動機モデルを、また(b)図に 1 相分の結線図を示す。本モデルの定格電圧は 140 (V)で、その時のギャップの平均磁束密度は 0.613 (T)である。また、極数は 2 である。鉄心の材質は S-40 相当の無方向性けい素鋼板であり、固定子及び回転子のスロット数はそれぞれ、24, 28 である。一次巻線は、毎極每相当り 56 ターンの 3 相同心巻 Y 結線とした。図中の U, V, W はそれぞれ U 相、V 相及び W 相巻線の位置を示し、これらは図のように二層巻されている。また、図中の番号は、歯の番号を示す。この場合、固定子巻線によって作られるマクロな磁束の回転方向は時計方向である。

解析は外部電源を考慮した有限要素法を用いて行った。第 3 章で述べた単相誘導電動機の解析方法との違いは、( 3. 9 ) 式が U 相、V 相及び W 相巻線の回路に対応して作られ、未知電流が U, V, W 相の電流  $I_u$ ,  $I_v$ ,  $I_w$  となることである。

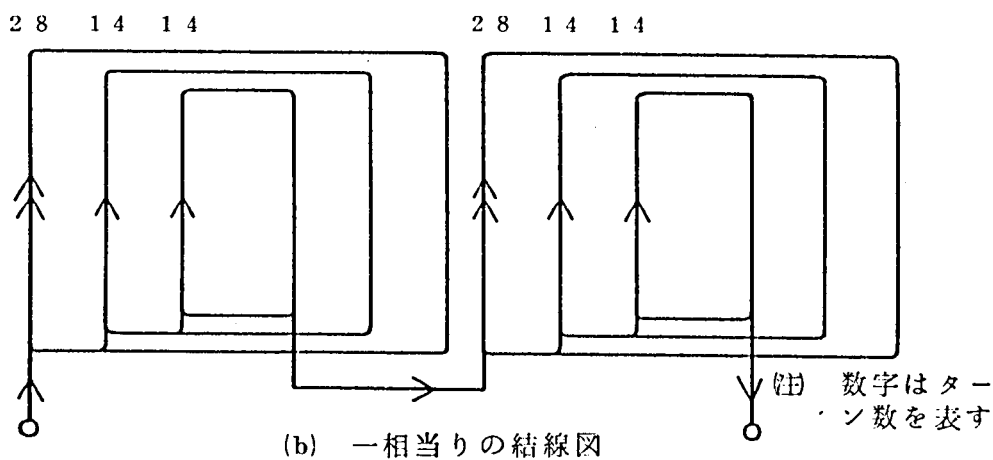
4. 3. 2 で後述するように、本実験モデルの回転子のかご形導体は、平角銅線を回転子の各スロットに 1 本ずつ挿入して構成してある。ところで、回転子スロット内の導体を要素分割しては要素数が多くなって計算時間が増大するので、ここではスロット内がすべて導体であるとして取扱い、次式で計算される等価な導電率  $\sigma$  を与えた。

$$\sigma = \sigma_c \frac{Sc}{S'} \quad ( 4. 1 )$$





(a) 鉄心形状及び巻線配置



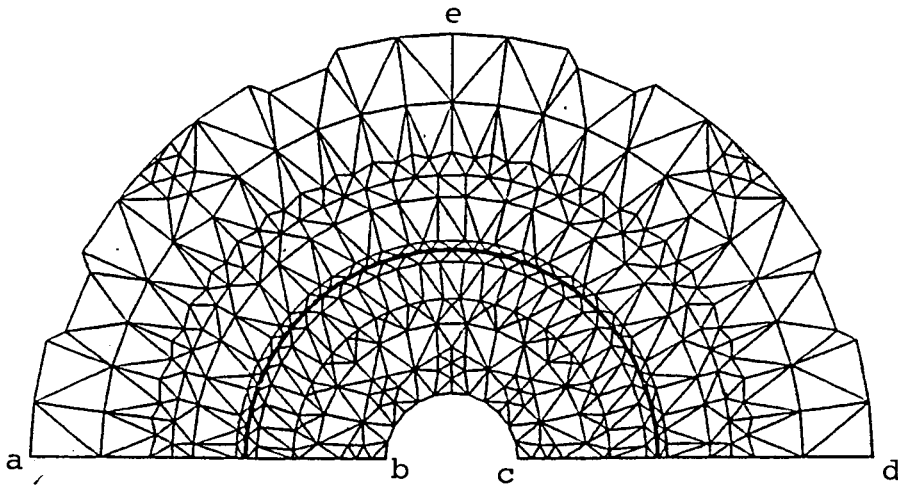
(b) 一相当りの結線図

第 4.1 図 三相誘導電動機モデル

ここで、 $\sigma_c$ は回転子スロット内の導体の導電率、 $S_c$ はその導体の断面積、 $S'$ はスロットの断面積である。

後述の静止モデルの実験結果と対応させるため、回転子は静止させたままで、すべり  $S = 0$  の解析においては、回転子導体の導電率  $\sigma = 0$  とし、始動時  $S = 1$  の解析においては、(4.1)式より求めた導電率に更に短絡環の抵抗を考慮して、 $\sigma = 0.1137 \times 10^7 (\text{v/m})$  とした。

第4.2図に分割図を示す。解析は周期性を考慮して  $1/2$  領域で行った。単相誘導電動機の場合と同様、境界  $a-b$ 、 $d-c$  は周期境界、境界  $b-c$ 、 $a-e-d$  は固定境界とし、そのベクトルポテンシャルを零とした。



第 4.2 図 分割図

#### 4. 2. 2 磁束分布及び磁束密度波形

##### (1) 磁束分布

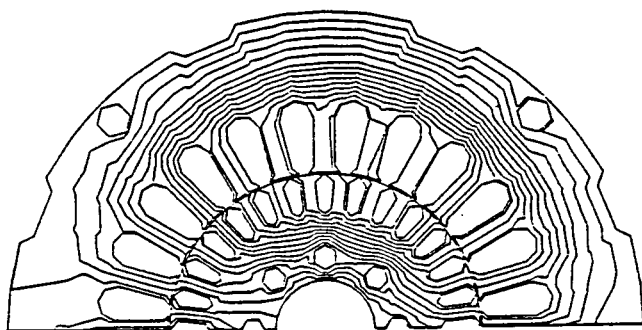
第 4. 3 図に、すべり  $S = 0.0$  で  $V = 70, 140$  (V) の、また  $S = 1.0$  で  $V = 50$  (V) の場合について、 $\omega t = 90^\circ$  における磁束分布を示す。ここで時間基準は、U 相電圧が零になる瞬間とした。すべり  $S = 1.0$  であっても、この場合は二次導体の電流による反作用磁界が小さいため、第 3. 4 図(c)の場合のような、固定子及び回転子歯の先端を円周方向に走る磁束は見られない。

##### (2) 磁束密度の時間的な最大値の分布

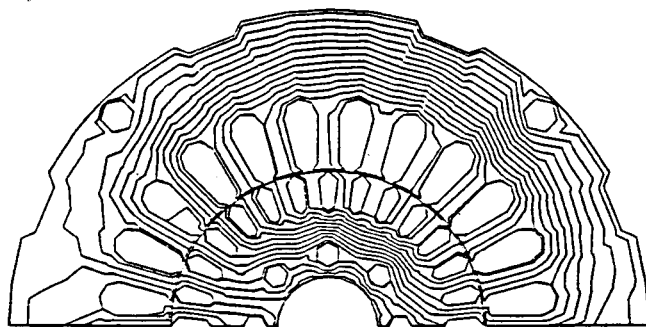
第 4. 4 図に、第 4. 1 図(a)の各固定子歯における磁束密度の時間的な最大値の分布を示す。図には実測結果も斜線で示した。この場合、例えば番号 7 の歯の位置は、第 4. 1 図(a)に示すように U 相巻線の中心軸に対応している。第 4. 4 図(a)と(b)を比較すれば、磁束密度の低い  $V = 70$  (V) においては、第 4. 4 図(a)のように、歯 1, 4, 7, 10 の磁束密度は他の歯のそれよりも高くなっているが、磁束密度の高い  $V = 140$  (V) では、(b)図のように鉄心の磁気飽和のために、これらの歯の磁束密度の他の歯のそれに対する増加の割合は  $V = 70$  (V) の場合ほどではない。

##### (3) 回転磁束分布

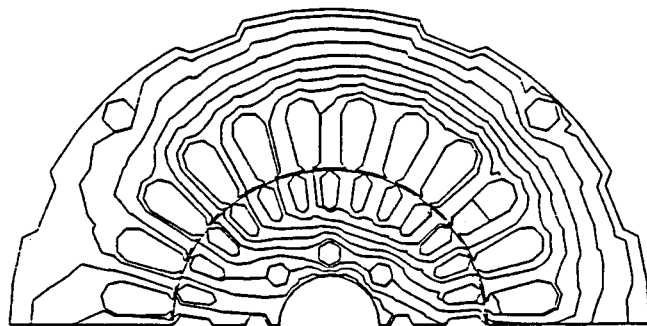
第 4. 5 図に、固定子各部の回転磁束の計算結果を示す。回転磁束中の実線及び破線は、それぞれ  $\omega t = 0^\circ$  及び  $90^\circ$  における磁束密度ベクトルを示す。すべりが小さい場合に鉄心各部の磁束密度ベクトルの回転方向が、固定子巻線によって作られるマクロな磁束の回転方向と逆になることは、第 3. 6 図で述べた単相誘導電動機の回転磁束の場合と同じである。三相誘導電動機では逆相回転磁界が存在しないため、単相誘導電動機の場合と異なり、すべり  $S = 1.0$  の場合も軸



(a)  $S = 0.0$ ,  $V = 7.0 (V)$

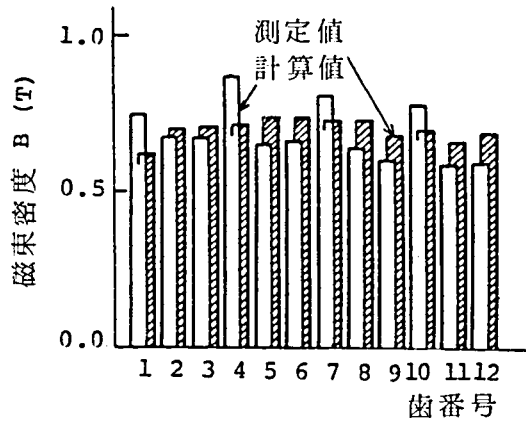


(b)  $S = 0.0$ ,  $V = 140 (V)$

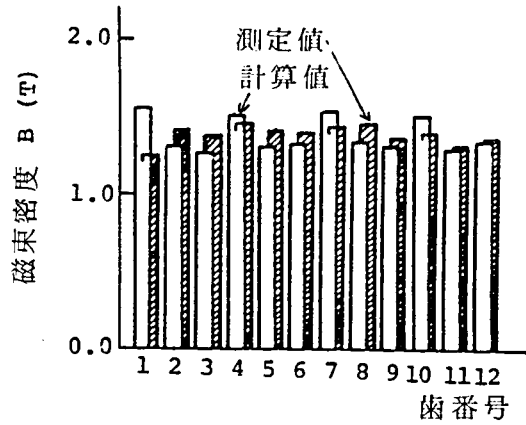


(c)  $S = 1.0$ ,  $V = 5.0 (V)$

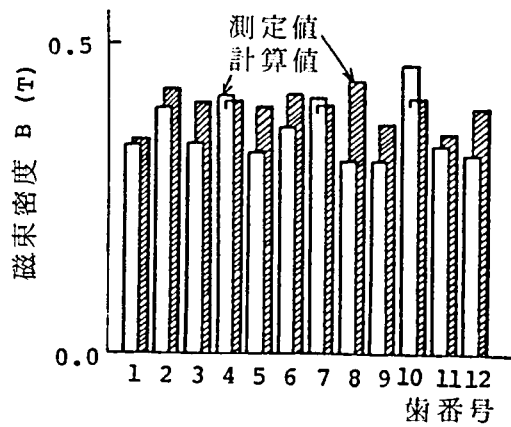
第 4.3 図 磁束分布 ( $\omega t = 90^\circ$ )



(a)  $S = 0.0$ ,  $V = 70$  (V)

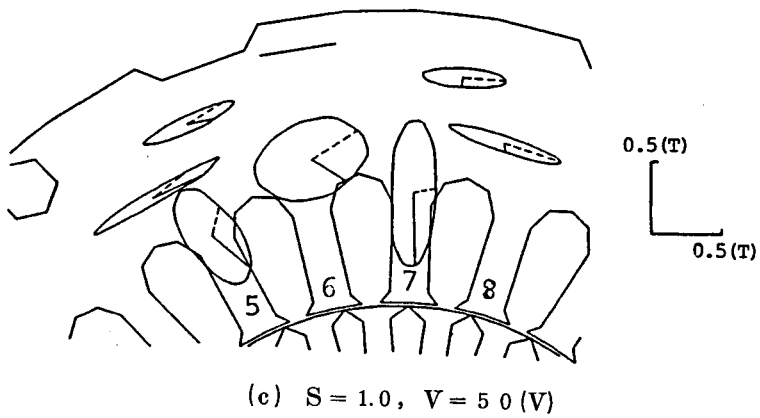
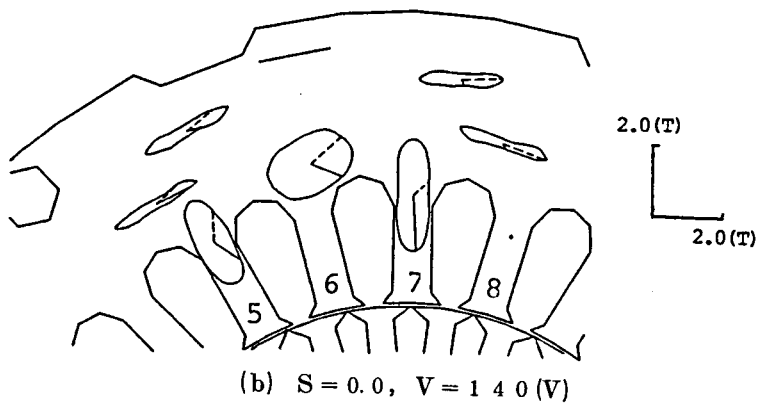
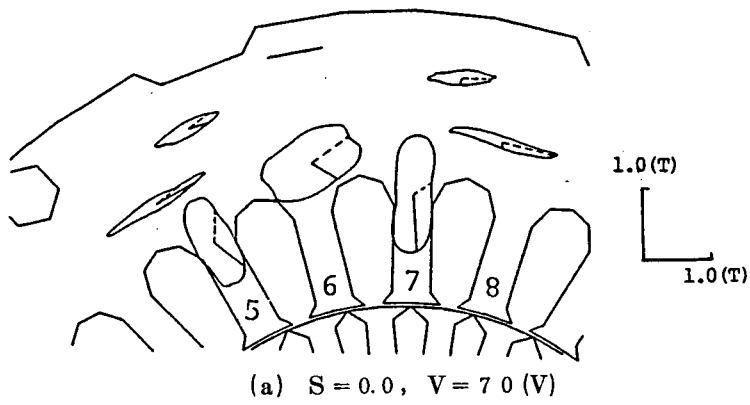


(b)  $S = 0.0$ ,  $V = 140$  (V)



(c)  $S = 1.0$ ,  $V = 50$  (V)

第 4.4 図 固定子歯部の磁束密度の時間的な最大値の分布



(注) 図中の数字は歯番号を示す

第 4.5 図 回転磁束分布

比の比較的大きな円回転磁界が生じている。固定子鉄心ヨークの背部外周付近及びスロット背部では、ほとんど円周方向を向く軸比の小さな円回転磁束が生じている。これは、第 4.3 図の磁束分布よりわかるように、固定子歯で半径方向を向いていた磁束が、歯の背部で円周方向に曲がり、固定子鉄心ヨークの背部外周付近やスロット底部では、ほとんど円周方向に磁束が通るからである。歯の背部付近では軸比の比較的大きな円回転磁束が生じているが、これは単相誘導電動機の場合と同様な理由で生ずる。

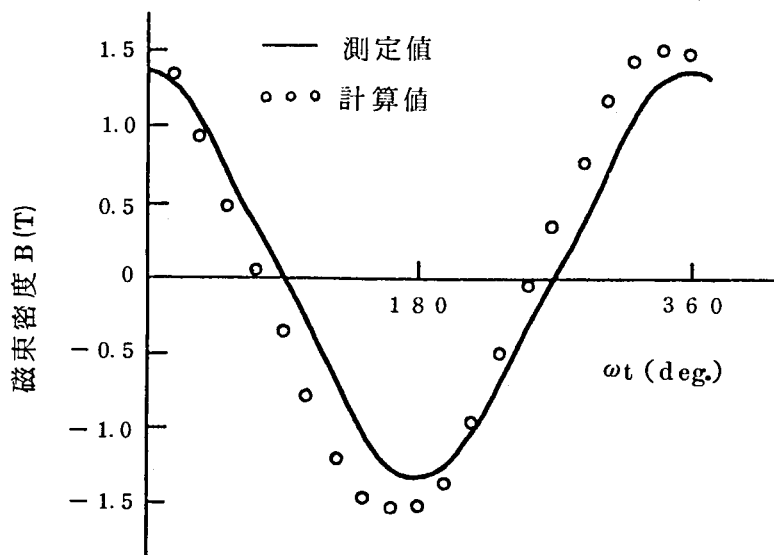
第 3 章でも触れたように、回転磁束が生ずる箇所では、振幅が同じ交番磁束よりも大きな鉄損が発生するので、第 4.5 図より、固定子鉄心ヨークの背部外周の鉄損は少ないが、固定子歯の背部に近づくに従って鉄損が大きくなっていることが推察される。

#### (4) 磁束密度波形

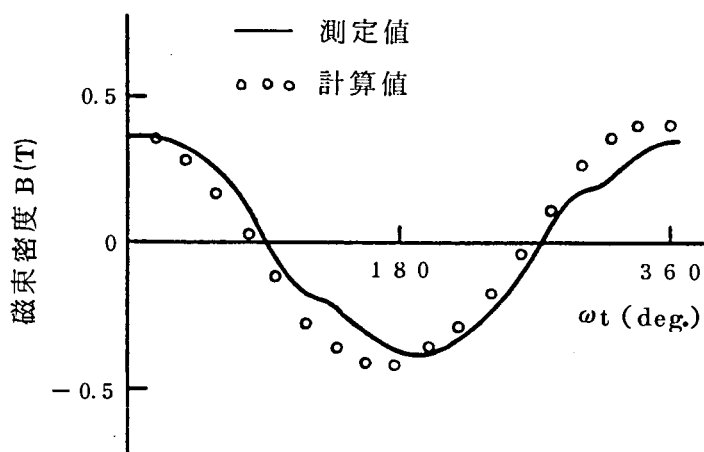
第 4.1 図(a)における歯 7 の磁束密度波形を第 4.6 図に示す。計算値は○印で、また測定値は実線で示した。これより、測定値と計算値は比較的良好に一致することがわかる。

#### (5) 等最大磁束密度線図

第 4.7 図に、 $S = 0.0$ 、 $V = 140$  (V) の場合の等最大磁束密度線図の計算結果を示す。図中の数字は磁束密度 (単位: T) であり、等最大磁束密度線は 0.2 (T) ごとに描いた。固定子鉄心ヨークのボルト穴近傍では、磁路の断面が狭くなっているため、この付近でかなり磁束密度が大きくなっている。ボルト穴近傍を除く固定子鉄心ヨークの背部外周付近の磁束密度は、歯部に比べて 0.2 (T) 程度低くなっている。このように本手法を用いれば、従来、大まかにしか予想できなかった各部の磁束密度の分布を、定量的に求めることができる。



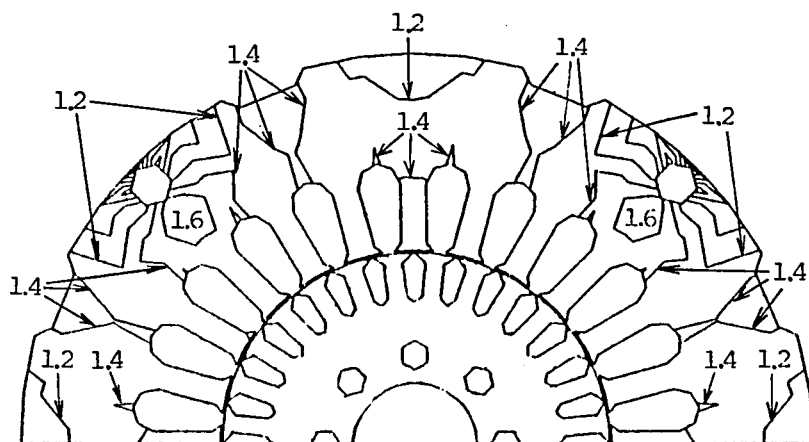
(a)  $S = 0.0$ ,  $V = 140$  (V)



(b)  $S = 1.0$ ,  $V = 50$  (V)

第 4.6 図 歯 7 の磁束密度波形



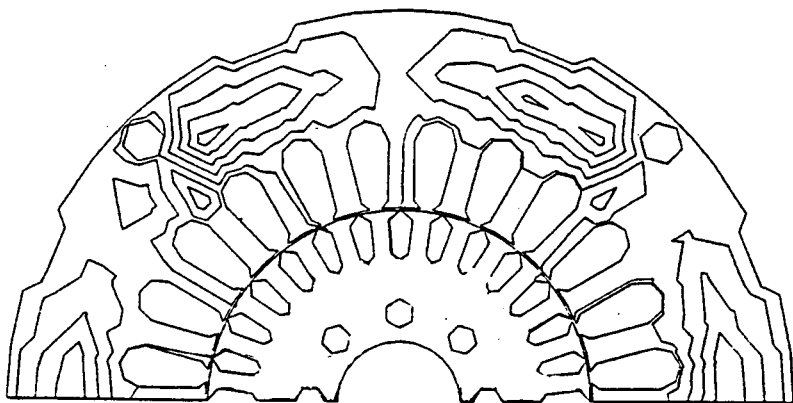


単位 : T

第 4.7 図 等最大磁束密度線図 ( $S=0.0$ ,  $V=140(V)$ )

#### (6) 第 3 調波磁束分布

第 4.8 図に、 $S=0.0$ ,  $V=140(V)$  の場合の第 3 調波磁束分布を示す。これは、鉄心内の各節点のベクトルポテンシャルを調波分析し、その第 3 調波成分の  $3\omega t = 90^\circ$  における瞬間のベクトルポテンシャルの等しい点を結んだものである。第 4.7 図の等最大磁束密度線図と比較すればわかるように、磁束密度の高い部分、すなわち固定子のボルト穴付近で、第 3 調波の磁束線が密になる分布をしている。第 3 調波磁束の大部分は固定子鉄心のヨーク内でのみ循環しており、歯を通して回転子にまで行く磁束はほとんどない。これは、第 3 調波磁束が主に鉄心の飽和によって生じているからである。



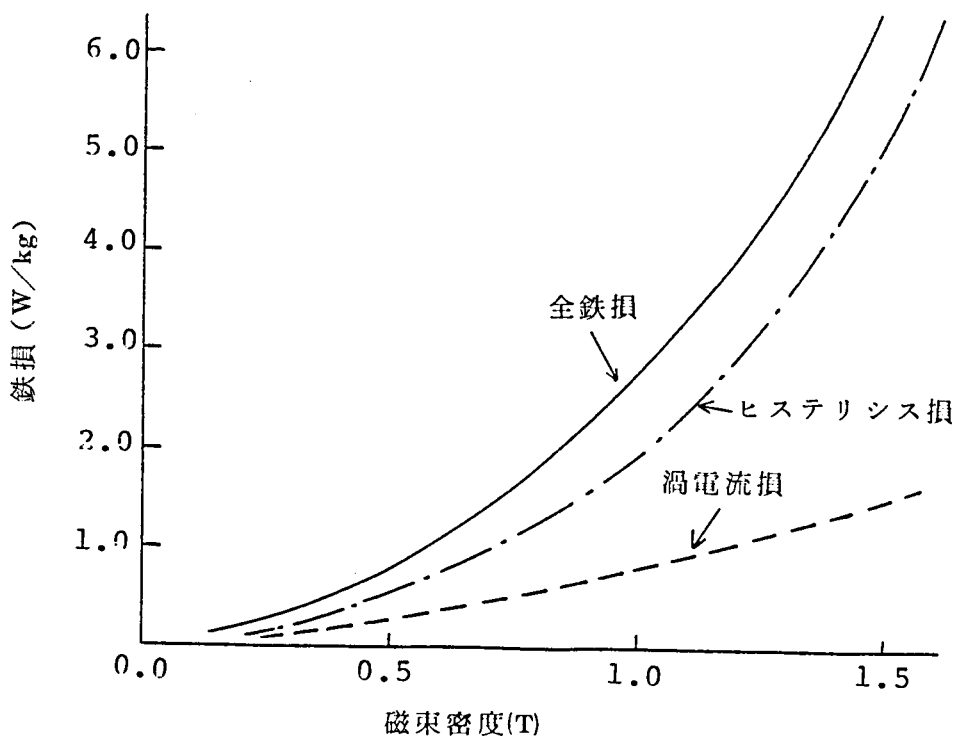
第 4.8 図 第 3 調波磁束分布 ( $S = 0.0$ ,  $V = 140$  (V))

#### 4.2.3 鉄損分布

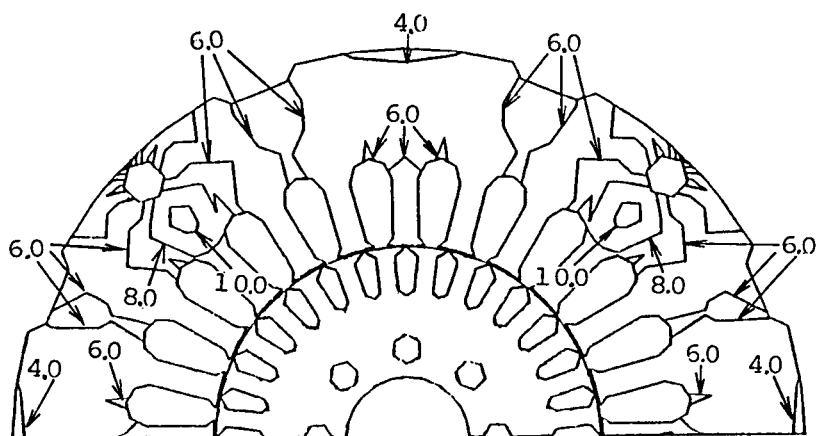
第 4.9 図に，使用した S-40 相当のけい素鋼板の鉄損を，エプスタイン試験器を用いて，ひずみ波法によりヒステリシス損と渦電流損に分離した結果を示す。この曲線をもとに 3.3.3 で述べたのと同様の手法を用いて鉄心各部の鉄損の算定を行った。

第 4.10 図に， $S = 0.0$ ， $V = 140$  (V) の場合の等鉄損線図を示す。図中の数字は鉄損（単位： $W/kg$ ）を示しており，等鉄損線は  $2.0$  ( $W/kg$ ) ごとに描いた。等鉄損線図は，第 4.7 図の等最大磁束密度線図と同様の分布を示している。この理由は，ヒステリシス損は (3.25) 式のように，最大磁束密度の関数と考えてもよく，かつ，第 4.9 図よりわかるように，このけい素鋼板の鉄損に占めるヒステリシス損の割合は，渦電流損に比べてかなり大きいためである。また，第 3.10 図の場合と同様に，固定子巻線の相が周方向に変化する部分の歯，つまり第 4.1 図(a)の歯 4，7，10 の鉄損は，他の歯のそれよりも大きくなっている。

なお、固定子歯の背部においても、 $6.0 \text{ (W/kg)}$  以上の鉄損が発生しているが、その範囲が小さいため、図ではこれが描かれていない。結局、ボルト穴近傍の磁路の断面が狭くなっている部分と、固定子巻線の相が周方向に変化する部分の歯で鉄損が多く発生しており、ボルト穴から離れた固定子鉄心ヨーク外周の鉄損は、他の部分に比べて  $2.0 \sim 6.0 \text{ (W/kg)}$  程度少ない。これより、全鉄損を減らすためには、固定子鉄心のどの寸法を増減させればよいかの詳細な指針が得られる。



第 4.9 図 鉄損曲線 (S-40 相当,  $0.5 \text{ mm}$  厚,  $60 \text{ Hz}$ )



単位 : W/kg

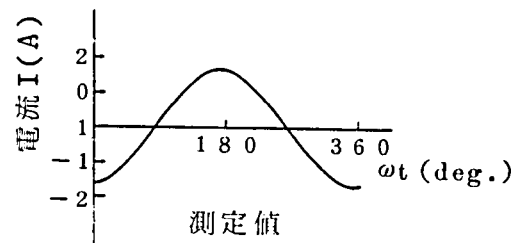
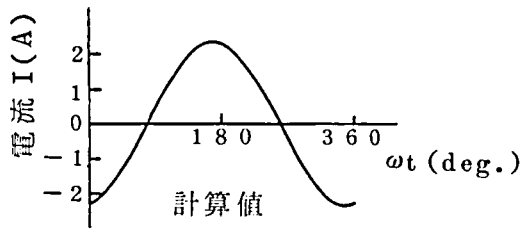
第 4.10 図 等鉄損線図 ( $S=0.0$ ,  $V=140$  (V))

#### 4.2.4 電流波形

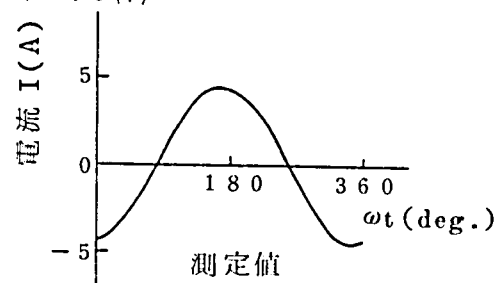
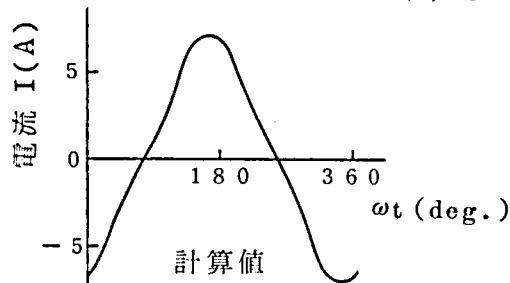
第 4.11 図に、線電流波形の計算値と測定値の比較を示す。(a), (b)図の  $S=0.0$  の場合は計算値にかなり誤差があるのに対し、(c)図の  $S=1.0$  においては計算値と測定値は比較的良く一致している。これは、(a), (b)図の電流はいわゆる励磁電流であるので、3.3.4 で述べたように、鉄心の磁気飽和の影響で、磁束密度のわずかな誤差により電流に大きな誤差が現れるためと考えられる。それに対し、(c)図の電流は始動電流であるため、上記のような磁束密度の誤差及び鉄心の磁気飽和に起因する電流の誤差は相対的に小さくなるからである。

#### 4.3 モデル誘導電動機による実験的検討

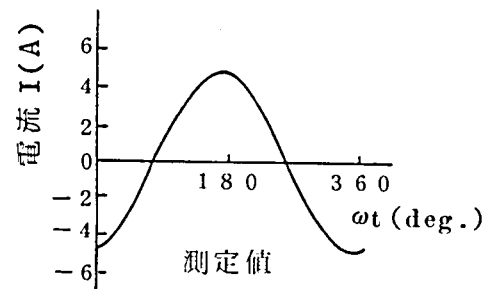
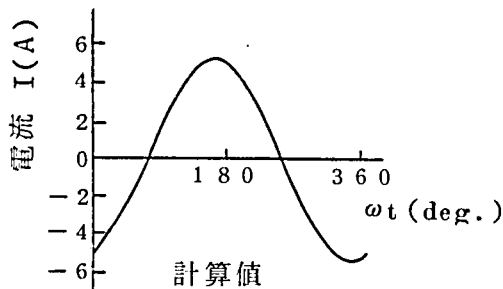
ここでは、三相誘導電動機の磁気特性の実験的検討を行うが、その際、回転時の磁気特性を静止状態で模擬するためのモデルの検討を行った。



(a)  $S = 0.0$ ,  $V = 7.0$  (V)



(b)  $S = 0.0$ ,  $V = 14.0$  (V)



(c)  $S = 1.0$ ,  $V = 5.0$  (V)

第 4.1.1 図 線電流波形

#### 4.3.1 回転時の磁気特性を静止状態で模擬する方法の検討

誘導電動機の磁束及び鉄損分布の測定を行う際、回転子が回転している場合の測定を行うのが理想であるが、回転していると回転による気流のため、各部の鉄損を熱電対を用いて測定する際に、冷却が不安定になって熱電対の出力が安定しにくい等種々の問題点が考えられるので、ここでは測定のしやすさという観点に立って、回転子を静止させた状態で磁束及び鉄損分布の測定を行う。

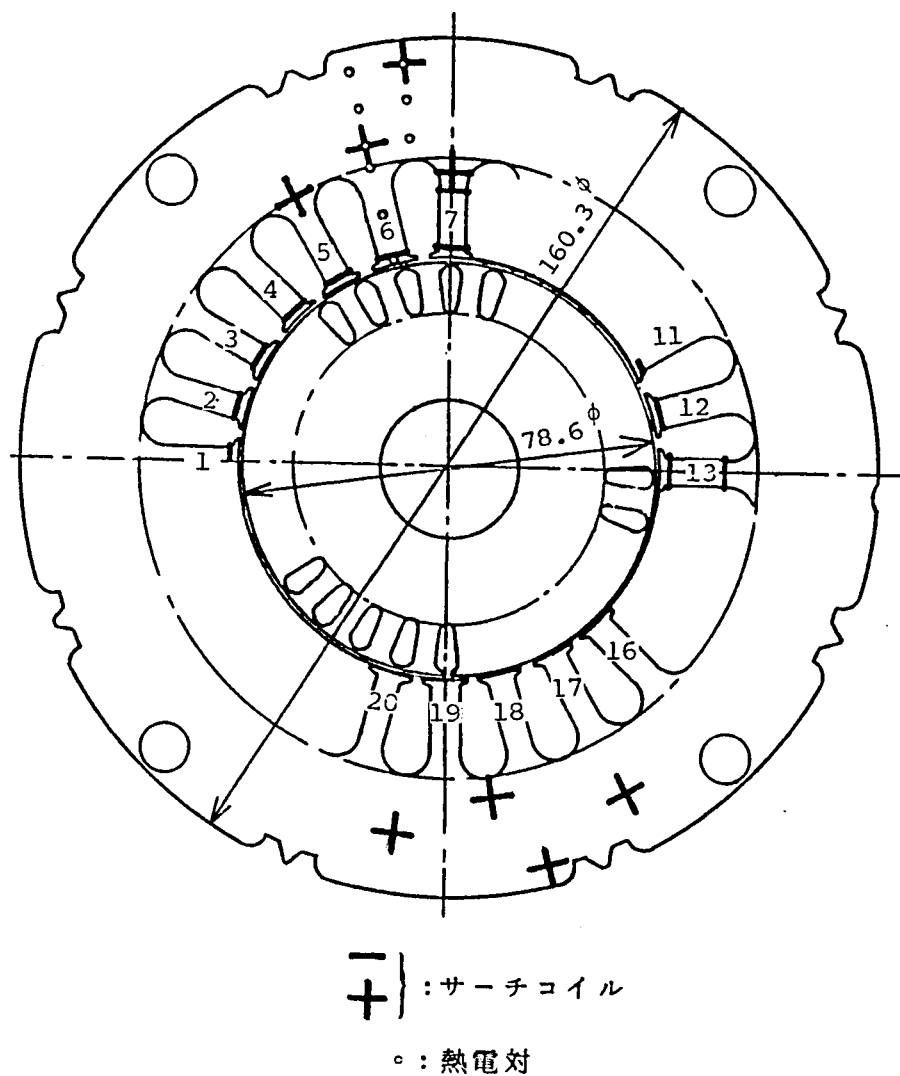
回転子中を通る磁束の周波数はすべり周波数であるため、無負荷時及び負荷時には、鉄心中に生ずる鉄損は主に固定子側で発生するので、固定子の鉄損が測れさえすればよい。また、かご型誘導電動機では回転子の回転に伴って生ずるスロット・リプルは小さいので、これを無視しても大きな誤差は生じないと考えられる。

それゆえ、もし、回転子を静止させた状態で、固定子鉄心中の磁束分布が、回転子が回転中の磁束分布と同じになるように模擬できれば、回転子を静止させたままで固定子鉄心中の磁束及び鉄損分布の測定を行ってもよい。ところで、回転子導体の抵抗を $r_2$ とすれば、誘導電動機のあるすべり $S$ における回転子導体の固定子側からみたみかけの抵抗は、 $r_2/S$ となるので、回転子導体の抵抗を変化させれば、回転子を静止させたままで種々のすべり $S$ における固定子側の磁束の状態を作ることができる。そこで、回転子導体の抵抗を変化させることにより、回転子を静止させたままで、種々のすべりにおける回転状態の磁気特性を模擬できる、いわゆる静止モデルを製作した。

#### 4. 3. 2 モデル誘導電動機

実験に使用した鉄心は第 4. 1 2 図に示す通りである。鉄心の材質は、厚さ 0.5 (mm) の無方向性けい素鋼板 S-40 相当のものであり、固定子用鉄心は焼鈍されている。鉄心の積層枚数は、固定子及び回転子ともに 100 枚とし、圧延方向が一枚ごとに直交するように積層し、磁束分布の片寄りの相殺をはかった。

実験モデルの製作に当っては、有限要素法による二次元磁界解析と対応できるように配慮した。すなわち、スロット内の巻線配置は、磁界解析において周期境界条件が適用できるようにするため、第 4. 1 図 (a) に示したように、回転子軸中心に対して点対称とした。また、軸方



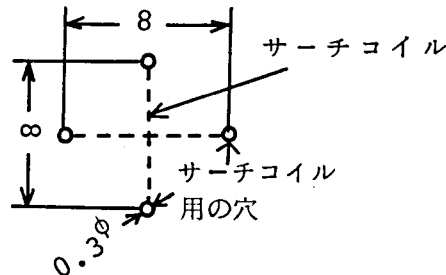
第 4.12 図 サーチャコイル及び熱電対の位置

向に一樣とみなせるように、回転子はスキューのない構造とした。回転子のかご形導体は、断面積  $7.5 (mm^2)$  の平角銅線を回転子の各スロットに 1 本ずつ挿入して構成した。定格電圧  $V(V)$  は、ギャップの設計磁束密度を  $B_g(T)$  とすれば次式となる。

$$V = \sqrt{3} \times 4.44 kdf \sum_{i=1}^n (k_{pi} N_i S_i) B_g \quad (4.2)$$

ここに， $k_d$ は分布係数， $k_{pi}$ ,  $N_i$ ,  $S_i$ ,  $n$  はそれぞれ，各コイルの短節係数，巻数，磁束が鎖交する鋼板の断面積及びコイル数である。本実験においては， $B_g = 0.613 \text{ (T)}$ として， $V = 140 \text{ (V)}$ と定めた。

回転磁束を測定するために，けい素鋼板に第 4.13 図のような，直径  $0.3 \text{ (mm)}$  の穴をあけ，円周方向及び半径方向の二つの直交するサーチコイルを設けた。サーチコイルのターン数はすべて 1 ターンとした。第 4.12 図に，これらのサーチコイルの取付位置を + 印で示す。



第 4.13 図 回転磁束測定用サーチコイル

固定子歯の磁束分布測定用のサーチコイルは，軸方向の磁束分布の測定値のバラツキを平均化する意味で，100 枚積層されている鉄心の中心部にある 30 枚の鋼板をひとまとめにして，1 ターン巻いた。第 4.12 図に，これらのサーチコイルの取付位置を - 印で示す。

局部鉄損は，固定子鉄心の，ある代表的な箇所を測ればよいという観点から，第 4.12 図の固定子歯 6 の中心線上とその隣のスロット背部に，○印で示す位置に，銅-コンスタンタン熱電対をはり付けた。

#### 4.3.3 測定結果と検討

##### (1) 磁束分布及び磁束密度波形

固定子各歯の磁束密度の時間的な最大値の分布及び第 4.1 図(a)の歯 7 の磁束密度波形の測定結果については，既に第 4.4 図，第 4.6 図に



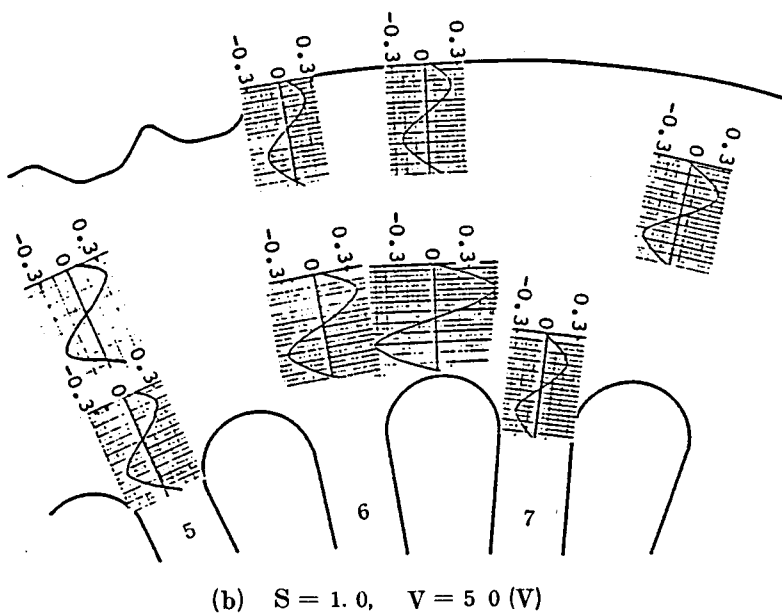
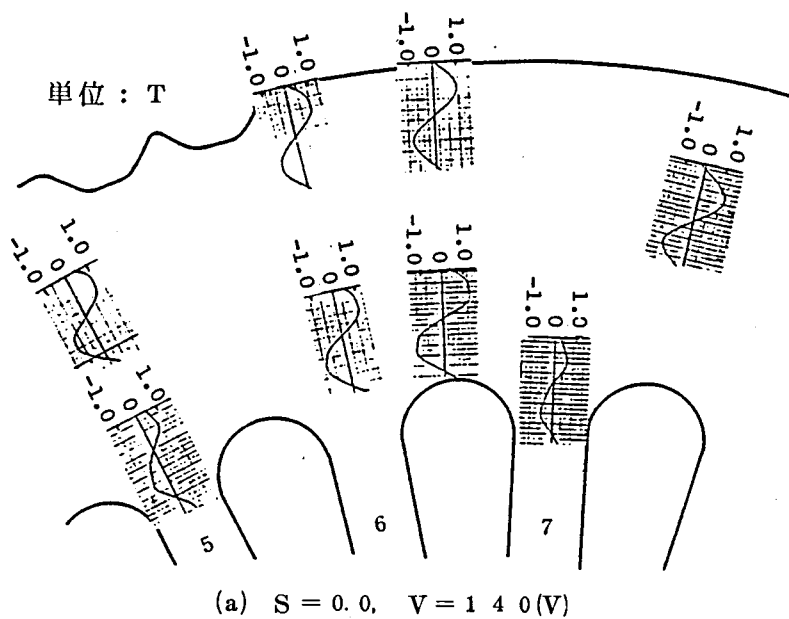
示した通りである。これより，測定値と計算値は比較的良く一致していることがわかる。

第 4.14 図に，固定子鉄心背部の磁束密度波形の円周方向成分の分布，第 4.15 図に半径方向成分の分布を示す。これより， $S=0.0, V=140$  (V) の場合は，磁束密度波形の円周方向成分は，固定子歯の背部を除き，ほぼ同じ値になっていることがわかる。また， $S=0.0, V=140$  (V) における磁束密度波形の円周方向成分の第 3 調波磁束の含有率は，スロット背部や固定子歯背部で約 5 ～ 10 (%)，固定子鉄心ヨークの背部外周で約 2 ～ 3 (%)，磁束密度波形の半径方向成分のそれは，スロット背部や固定子歯背部で約 10 ～ 20 (%)，固定子鉄心ヨークの背部外周で約 2 ～ 3 (%)である。このように，磁束密度波形の半径方向成分が，円周方向成分に比べてひずみの度合いが大きいのは，第 4.3 図及び第 4.8 図よりわかるように，磁束の基本波成分の多くが，固定子鉄心背部では円周方向を通過するのに対して，第 3 調波成分は固定子鉄心背部で循環し，磁束の基本波成分の少ない半径方向において，高調波成分の比率が大きくなるためである。

第 4.16 図に，固定子鉄心ヨーク各部の磁束密度ベクトルの軌跡を，回転磁束として示す。第 4.5 図の所で述べたのと同様に，固定子鉄心ヨークの背部外周付近及びスロット背部で，ほとんど円周方向を向く軸比の小さな円回転磁束が生じている。また，歯の背部付近では，軸比の比較的大きな円回転磁束が生じている。(b)図の  $V=140$  (V) の場合は，(a)図の  $V=70$  (V) の場合に比べて，鉄心の飽和のため，よくひずんだ円回転磁束が生じている。

## (2) 鉄損分布

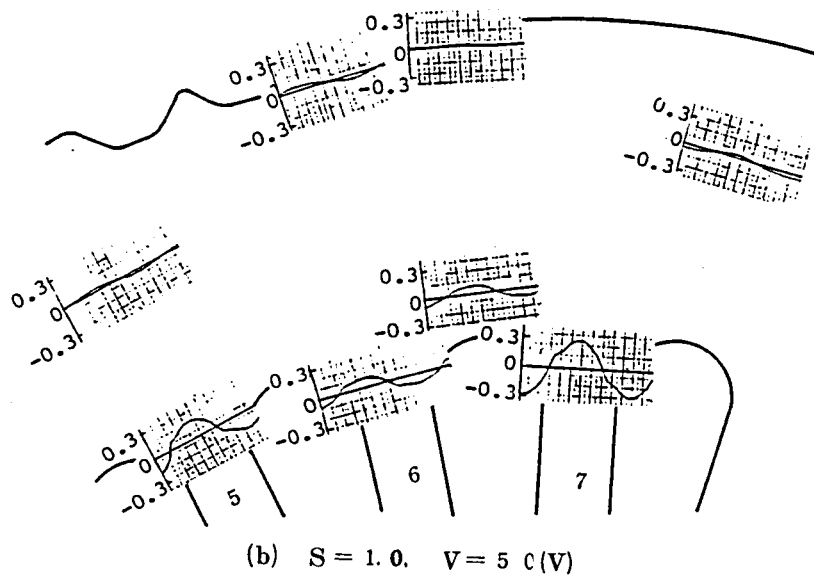
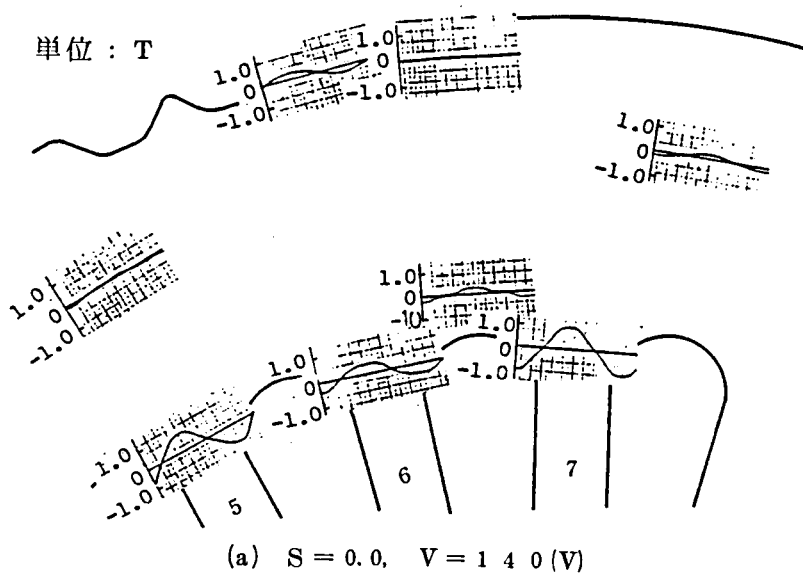
鉄損は，文献(44)に示したようなマイクロコンピュータを用いた局部



(注) 図中の数字は歯番号を示す。

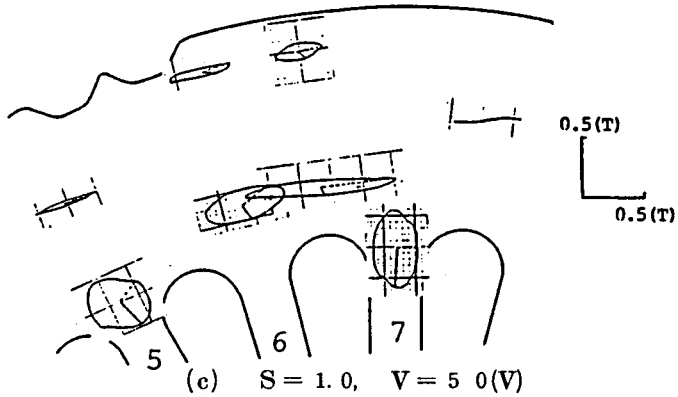
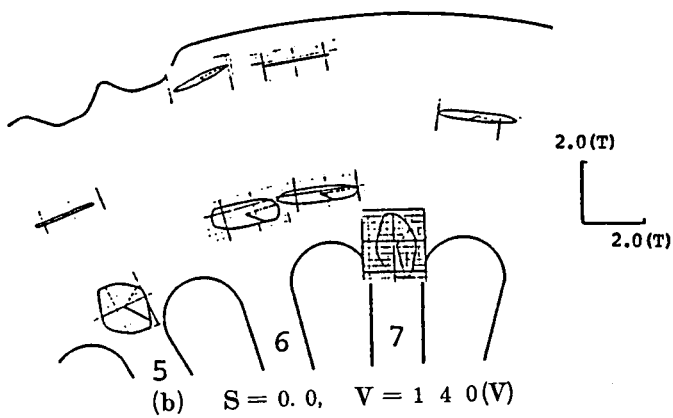
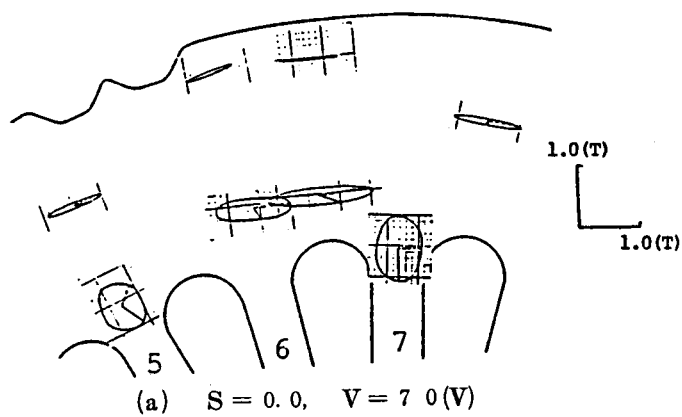
第 4.14 図 磁束密度波形の円周方向成分

単位 : T



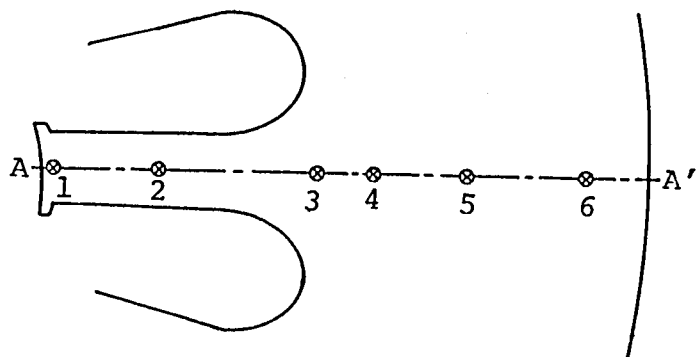
(注) 図中の数字は歯番号を示す。

第 4.15 図 磁束密度波形の半径方向成分

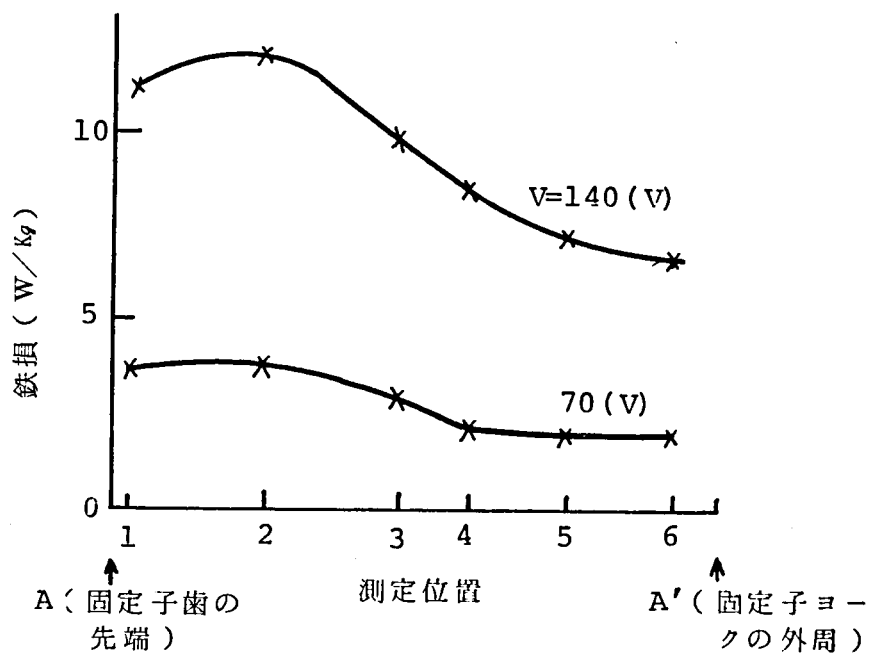


(注) 図中の数字は歯番号を示す。

第 4.16 図 回転磁束分布



(a) 測定位置（固定子歯 6 の中心線上）



(b) 歯 6 の中心線上の鉄損

第 4.17 図 固定子の鉄損分布

鉄損測定システムを用いて測定した。第 4.17 図に、すべり  $S=0$ ,  $V=140(V)$  の場合の固定子歯 6 の中心線上の鉄損分布の測定値を示す。この図から、固定子歯部の損失は、固定子背部の損失よりもかなり大きくなっていることがわかる。

#### 4.4 結 言

三相誘導電動機の磁気特性の詳細な実験的ならびに解析的検討を行った。得られた結果をまとめると、次のようになる。

- (1) 固定子歯の背部で軸比が 1 に近いひずんだ円回転磁束が生ずる。
- (2) 無負荷時には、磁気飽和のために固定子鉄心ヨーク内でのみ循環する第 3 調波磁束が存在する。
- (3) 固定子巻線の相が周方向に変化する部分の歯の鉄損は他の歯よりも多い。また、固定子にボルト穴が存在し、その近傍の磁路の断面が狭くなっている場合は、その付近で鉄損が相当発生する。このように、鉄損分布の詳細が明らかになったので、全鉄損を減らすためには、鉄心のどの部分の寸法を増減させればよいかの指針を得ることができた。

## 結

## 論

本論文では、有限要素法を電気機器の磁気特性解析に適用するための新解析法として、外部電源を考慮した有限要素法、寸法決定法を導入した有限要素法及びギャップ要素等の特殊要素を考案するとともに、単相及び三相誘導電動機の磁気特性の解析的ならびに実験的検討を行った。本研究の成果を要約すると、以下のようになる。

- (1) 端子電圧や磁束分布を与えて、電流の大きさや電気機器の寸法を求める、いわゆる逆問題を三つのタイプに分類し、有限要素法を磁気回路設計に適用するためには、この逆問題の解析法を是非とも確立する必要があることを示した。
- (2) 印加電圧が与えられると、それに対応した強制電流を直接求めることができる、いわゆる外部電源を考慮した有限要素法を考案し、本手法を用いれば、従来、有限要素法による解析が困難であった三相変圧器の磁化電流解析や、単相誘導電動機の磁気特性解析等が可能であることを示した。
- (3) エネルギーは有するが面積を持たない寸法修正要素を導入し、これを外部電源を考慮した有限要素法と結合することにより、所望の磁束分布を得るために必要な磁石寸法を決定することができる、いわゆる寸法決定法を導入した有限要素法を考案した。そして、これを用いれば電子複写機のマグネットロールの磁石の設計等が可能であり、実験的にも実用上十分であることを示した。なお、本手法を更に発展させれば、試行錯誤を行うことなく、磁気回路の最適設計を行うことも可能であると思われる。
- (4) 寸法修正要素の考え方を更に発展させることにより、ギャップ、シールド板の寸法やけい素鋼板の長さが、電気機器の磁気特性に及ぼす影響を容易に知ることができる、ギャップ要素、シールド要素及び延長要

素なる新要素を考案した。さらに、これらの要素を電磁石の吸引力解析、電磁シールド効果の解析、変圧器鉄心窓寸法がその磁気特性に及ぼす影響を検討する場合等に適用し、その有用性を示した。

これらの要素は次のような特長を有している。

- (a) 分割図を修正することなく、任意の位置に容易にギャップやシールド板等を設定することができる。
- (b) ギャップの長さやシールド板の厚さの変更が容易であるため、電気機器の最適形状を求める際に使用すると極めて有用である。
- (5) 外部電源を考慮した有限要素法による単相及び三相誘導電動機鉄心内の磁束分布の解析結果は実験結果と比較的良く一致し、鉄心の磁気特性を解析する手法として有用であることを示した。
- (6) 単相及び三相誘導電動機ともに、すべりの小さい場合は、固定子歯の背部で軸比（短軸／長軸）の比較的大きなはずんだ円回転磁束を生じており、かつそれらは1スロットピッチごとにほぼ等しい。それに対し、単相誘導電動機の始動時においては、逆相磁界のために歯の先端以外の部分の磁束はほぼ交番磁束となり、かつその大きさは場所によって異なるが、三相誘導電動機では、すべりの小さい場合と同様の回転磁束分布となる。
- (7) 固定子巻線の相が周方向に変化する部分の歯では、相帯漏れ磁束のために磁束密度が高くなり、他の固定子歯よりも鉄損が多く発生する。もし、固定子にボルト穴が存在し、その近傍の磁路の断面が狭くなっている場合は、その付近で相当の鉄損が発生する。また、固定子歯の背部では軸比の大きな円回転磁束のために鉄損が増加している。それに対し鉄損が少ないのは、固定子鉄心ヨーク外周付近である。このように、鉄損分布の詳細がわかれば、鉄損の少ない誘導電動機鉄心の設計を行う



ための有用な指針を得ることができる。

## 謝 辞

本研究は京都大学工学部上之園親佐教授のご指導のもとに遂行されたものであり、終始ご懇切なご教示とご鞭達を賜りました。ここに深甚なる感謝の意を表する次第です。また、細部にわたり色々のご助言をいただいた京都大学工学部卯本重郎教授及び岡田隆夫教授に厚く感謝の意を表します。

本研究の全過程を通じ、ご指導、ご鞭達を賜った岡山大学工学部中田高義教授に心より感謝致します。また、日頃暖かい励ましをいただいた岡山大学工学部姫井豊治教授、美咲隆吉教授、山本辰馬教授に感謝致します。さらに、岡山大学にご在職中に本研究に関し種々ご助言を下さった同志社大学工学部石原好之助教授にお礼申し上げます。

京都大学工学部金子和博助手始め、上之園研究室と岡田研究室の方々には有益な御助言をいただきました。さらに、岡山大学工学部河瀬順洋助手、中野正典技官ならびに特別研究及び大学院工学研究科の学生諸君には、計算、実験、データ整理などにご協力いただきました。以上の方々に對し、ここに心から感謝致します。

リョービ株式会社住建機器本部技術部の棗田直行主任、松下電器産業株式会社電動機研究所の和田正美技師ならびに東京電気化学工業株式会社マグネット事業部の西吾三郎事業部長始め関係各位には実験試料を提供していただくとともに有益なご助言をいただいた。ここに深く感謝致します。

## 参 考 文 献

- (1) 石原, 中田, 中野, 松村: 変圧器鉄心の磁気特性に及ぼす諸因子の実験的検討, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-80-44 (昭55)
- (2) G.S. Radley and A.J. Moses: Apparatus for Experimental Simulation of Magnetic Flux and Power Loss Distribution in a Turbogenerator Stator Core, IEEE Trans. on Magnetics, MAG-17, 3, 1311 (1981)
- (3) 中田, 石原, 松村: 有限要素法による変圧器鉄心の磁気特性に及ぼす諸因子の検討, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-80-45 (昭55)
- (4) K. Ito, T. Tokumasu, S. Nagano, M. Tori and S. Doi: Simulation for Design Purposes of Magnetic Fields in Turbine-Driven Generator End Region, IEEE Trans. on PA & S, PAS-99, 4, 1586 (1980)
- (5) M. V. K. Chari and P. Silvester: Finite-Element Analysis of Magnetically Saturated D-C Machines, IEEE Trans. on PA & S, PAS-90, 5, 2362 (1971)
- (6) T. Nakata and N. Takahashi: Direct Finite Element Analysis of Flux and Current Distributions under Specified Conditions, IEEE Trans. on Magnetics, MAG-18 (1982)
- (7) 中田, 高橋: 電気工学の有限要素法 (昭57) 森北出版
- (8) 中田, 高橋, 他: 有限要素法 (シミュレーション技術Ⅲ) (昭56) コロナ社

- (9) T. Nakata, Y. Ishihara, and N. Takahashi: Some Useful Techniques on Implementing the Finite Element Method for Computation of Electromagnetic Fields in Electrical Machinery, U. S. - Japan Seminar on Interdisciplinary Finite Element Analysis, J-14 (1978)
- (10) T. Nakata, Y. Ishihara and N. Takahashi: Finite Element Analysis of Magnetic Fields by Using Gap Element, Proceedings of Compumag Conference, 5-7 (1978)
- (11) T. Nakata, N. Takahashi and K. Yoneda: Numerical Analysis of Flux Distribution in Permanent-Magnet Stepping Motors, IEEE Trans. on Magnetics, MAG-14, 5, 548 (1978)
- (12) 中田, 高橋, 米田, 二階堂: 有限要素法による永久磁石を含む磁界の解析, 電気学会情報処理研究会資料, IP-77-54 (昭52)
- (13) 中田, 岡部: 有限要素法による磁化電流の計算法とその応用, 昭52 電気学会全国大会, No 617
- (14) 中田, 高橋, 藤原: 外部電源を考慮した有限要素法による単相誘導電動機の解析, 電気学会回転機・静止器合同研究会資料, RM-81-40, SA-81-30 (昭56)
- (15) 中田, 高橋, 波多野: 形状修正有限要素法による磁気回路の新設計法, 第5回日本応用磁気学会学術講演会, 21PA-15 (昭56)
- (16) 中田, 高橋, 棗田, 児玉, 藤原: 外部電源を考慮した有限要素法による単相直巻電動機の整流解析, 電気学会回転機・静止器合同研究会資料, RM-81-41, SA-81-31 (昭56)
- (17) 中田, 高橋, 河瀬, 増山: ソレノイド中の鉄板への磁束の浸透解析, 昭56 電気学会全国大会, No 675

- (18) 中田，高橋，井上，高杉：有限要素法による磁気回路設計法，昭 56 電気学会全国大会，No 671
- (19) 中田，高橋，米田，竹原：ギャップ要素を用いた有限要素法の磁界解析への応用，昭 53 電気学会全国大会，No 547
- (20) 中田，石原，岡部：ニュートン・ラプソン法を用いた有限要素法による電気機器の磁界解析，電気学会情報処理研究会資料，IP-76-22 (昭 51)
- (21) 中田，高橋，河瀬，増山，藤原：磁気回路解析のための特殊要素の開発，電気学会回転機・静止器合同研究会資料，RM-81-37，SA-81-27 (昭 56)
- (22) 中田，高橋，河瀬，増山：シールド要素を用いた有限要素法の渦電流解析への応用，昭 56 電気学会全国大会，No 677
- (23) 中田，高橋，河瀬：有限要素法による非磁性板中の渦電流解析，電気学会静止器研究会資料，SA-80-7 (昭 55)
- (24) 中田，高橋，河瀬，藤原：延長要素を用いた有限要素法による変圧器鉄心の磁界解析，昭 56 電気学会全国大会，No 673
- (25) 中田，高橋，河瀬：うず電流解析における電界 ( $\text{grad } \phi$ ) の考察，昭 54 電気関係学会関西支部連合大会，No G3-43
- (26) 中田，高橋，河瀬：うず電流解析における電界 ( $\text{grad } \phi$ ) の物理的意味の考察，電気学会情報処理研究会資料，IP-80-49 (昭 55)
- (27) 中田，高橋，米田，沢田：ギャップ要素を用いた有限要素法による電磁石の吸引力解析，昭 54 電気学会全国大会，No 578
- (28) T. Nakata, Y. Ishihara and N. Takahashi ; Numerical Solution of Flux Distributions in Transformer Cores, *Proceedings of International Symposium on Electrodynamics*, C2; 243 (1979)

- (29) 横塚：コンデンサ始動単相誘導電動機の解析，電学誌，91，11，  
2085（昭46）
- (30) 山田，三上：有限要素法による単相誘導電動機の損失計算，電学論B，  
101，499（昭56-8）
- (31) 中田，石原，高橋，赤穂，矢野：ギャップの磁束密度を入力データ  
とした有限要素法による回転機磁気特性の数値解析法，昭54電気学  
会全国大会，No 644
- (32) 中田，高橋，藤原：端子電圧を入力データとした有限要素法による  
誘導機の特性解析，電気学会回転機研究会資料，RM-80-9（昭55）
- (33) 中田，高橋，藤原，大石：端子電圧を入力データとした有限要素法  
による誘導機の磁界解析法，昭55電気学会全国大会，No 634
- (34) 中田，石原，高橋，河瀬：ヒステリシス及びうず電流を考慮した新  
しい磁界解析法，電気学会情報処理研究会資料，IP-80-9（昭55）
- (35) 地蔵，山田，岩本：吸引式磁気浮上車の高速走行浮上特性の解析，  
電学論B，97，215（昭52-4）
- (36) 中田，高橋，竹原：有限要素法のためのコンピュータグラフィック  
スのソフトウェア，昭54電気学会全国大会，No 575
- (37) 中田，高橋，河瀬：有限要素法におけるマトリクス計算法の改良，  
電気学会情報処理研究会資料，IP-80-50（昭55）
- (38) 中田：3相内鉄形変圧器鉄心内の磁束分布の解析，電学論B，95，  
217（昭50-5）
- (39) 中田，森本，高橋，立花：三相変圧器鉄心におけるT接合部の回転  
磁界の解析，電気学会磁性材料研究会資料，MAG-74-8（昭49）
- (40) 中田，高橋，米田：有限要素法によるタービン発電機内の回転磁束  
の解析，昭52電気四学会中国支部連合大会，No 40510

- (41) 中田, 石原, 中野: ひずみ波磁束によるけい素鋼板の鉄損, 電学誌, 90, 1, 115 (昭45)
- (42) 中田, 石原: 電気機器の鉄損推定法, 昭52電気四学会連合大会, 60
- (43) 中田, 石原, 高橋: 鉄損解析技術の現状と問題点, 昭56電気学会全国大会シンポジウム, S.4-3(1)
- (44) 中田, 高橋, 中野, 村上: 熱的鉄損測定法の精度の検討, 昭56電気四学会中国支部連合大会, No 61914
- (45) K. H. Huebner; The Finite Element Method for Engineers (1975) John Wiley & Sons, Inc.
- (46) Y. Ishihara and N. Takahashi; Iron Losses of Silicon Steel due to Rotating Fluxes (Inclined Rotating Flux and Distorted One), Memoirs of the School of Engineering, Okayama University, Vol. 14, 15 (1979)
- (47) T. Nakata, Y. Ishihara, N. Takahashi and Y. Kawase, Analysis of Magnetic Fields in Single-Sheet Tester with H Coil, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 21 (1982)
- (48) T. Nakata, N. Takahashi and Y. Kawase; Flux and Loss Distribution in the Overlap Joints of Laminated Cores, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 21 (1982)
- (49) 中田, 河瀬, 宮崎, 金万: 三相一括形GIS母線の渦電流解析, 昭56電気学会全国大会, No 678
- (50) 加藤, 坪井: 単相誘導電動機の各すべりにおける磁界の形について, 電学誌, 91, 4, 698 (昭46)
- (51) 原, 内藤, 勝山, 卯本: 時間周期有限要素法によるコロナ・シールド部の電界解析, 電気学会回転機・静止器合同研究会資料, PM-81-

10, SA-81-5 (昭56)



## 付 録 目 次

第 1 章	渦電流を含む二次元電磁界の基礎方程式 .....	134
第 2 章	外部電源を考慮した有限要素法における全体節点方程式 及びベクトルポテンシャル，電流及び端子電圧間の関係式 の一般形 .....	138
2. 1	全体節点方程式 .....	138
2. 2	ベクトルポテンシャル，電流及び端子電圧間の関係 式 .....	144
第 3 章	非対称マトリクスの解法 .....	145
3. 1	概 要 .....	145
3. 2	適 用 例 .....	146
第 4 章	寸法決定法を導入した有限要素法における全体節点方程 式及びベクトルポテンシャル，磁束密度間の関係式の一般 形 .....	147
4. 1	全体節点方程式 .....	147
4. 2	ベクトルポテンシャル，磁束密度間の関係式 .....	150

## 第 1 章 渦電流を含む二次元電磁界の基礎方程式

本章では，本文第 1.4 図のように，解析領域中に強制電流，導体及び磁性体が存在し，かつ導体内に渦電流が流れている場合の二次元電磁界の基礎方程式について述べる。

電磁界を支配するマクスウェルの電磁方程式は次式で表される。

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{付 1. 1})$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{付 1. 2})$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{付 1. 3})$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (\text{付 1. 4})$$

ここで， $\mathbf{B}$ ， $\mathbf{H}$ ， $\mathbf{D}$ ， $\mathbf{E}$ ， $\mathbf{J}$  はそれぞれ，磁束密度，磁界の強さ，電束密度，電界の強さ，電流密度である。また， $\rho$  は電荷密度である。 $\mathbf{B}$ ， $\mathbf{H}$ ， $\mathbf{D}$ ， $\mathbf{E}$ ， $\mathbf{J}$  の間には次式の関係がある。

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{付 1. 5})$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (\text{付 1. 6})$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{付 1. 7})$$

ここで， $\mu$ ， $\epsilon$ ， $\sigma$  はそれぞれ透磁率，誘電率，導電率である。(付 1.5) 式を磁気抵抗率  $\nu$  を用いて書換えると，次式となる。

$$\mathbf{H} = \nu \mathbf{B} \quad (\text{付 1. 8})$$

(付 1. 3) 式のように，磁束の発散は常に零であるから，次のような磁気ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  が定義できる。

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (\text{付 1. 9})$$

導体内部を通る磁束が変化すると起電力が生じ，渦電流が流れる。この渦電流密度  $\mathbf{J}_e$  は次式で与えられる。

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E}_e \quad (\text{付 1. 10})$$

ここで， $\mathbf{E}_e$  は電磁誘導によって生じた，渦電流を流すための電界である。この  $\mathbf{E}_e$  は次のようにして導出される。

(付 1. 2)，(付 1. 9) 式より，

$$\text{rot} \mathbf{E}_e = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \mathbf{A}) \quad (\text{付 1. 11})$$

これより，

$$\text{rot} \left( \mathbf{E}_e + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{付 1. 12})$$

(付 1. 12) 式は  $\mathbf{E}_e + \partial \mathbf{A} / \partial t$  が保存場であることを意味するので，電位  $\phi$  が定義でき，

$$\mathbf{E}_e = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \phi \quad (\text{付 1. 13})$$

ただし，上式の  $\text{grad} \phi$  は渦電流を正しく表すために必要な補正項であり，いわゆる電荷によってできる電界とは異なっていることに注意しなければならない。渦電流密度  $\mathbf{J}_e$  は (付 1. 10)，(付 1. 13) 式より，

$$\mathbf{J}_e = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \text{grad} \phi \quad (\text{付 1. 14})$$

渦電流密度  $\mathbf{J}_e$  の  $z$  方向成分を  $J_{ez}$  とすれば，二次元電磁界では (付 1. 14)

式より，

$$J_{ez} = -\sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{付 1. 15})$$

ここで， $A_z$  はベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の  $z$  方向成分である。

ところで，渦電流を含む電磁界の電流密度  $\mathbf{J}$  は，強制電流密度  $\mathbf{J}_0$  と渦電流密度  $\mathbf{J}_e$  を用いて次式で表される。

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_e \quad (\text{付 1. 1 6})$$

(付 1. 1) 式において変位電流  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  を無視したものと，(付 1. 8) (付 1. 9)，(付 1. 1 4)，(付 1. 1 6) 式より，次式のような渦電流を含む電磁界の基礎方程式が得られる。

$$\text{rot} (\nu \text{ rot } \mathbf{A}) = \mathbf{J}_0 - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \text{ grad } \phi \quad (\text{付 1. 1 7})$$

上式を成分表示するにあたって，まず(付 1. 8) 式を成分で考えてみる。(付 1. 8) 式の磁気抵抗率はテンソルであり，磁束密度  $\mathbf{B}$ ，磁界の強さ  $\mathbf{H}$  の  $x$ ， $y$ ， $z$  方向成分  $B_x$ ， $B_y$ ， $B_z$ ， $H_x$ ， $H_y$ ， $H_z$  の間には次式の関係がある。

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} \\ \nu_{31} & \nu_{32} & \nu_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{Bmatrix} \quad (\text{付 1. 1 8})$$

テンソル磁気抵抗率の対角成分以外を零とおける場合は，

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_x & 0 & 0 \\ 0 & \nu_y & 0 \\ 0 & 0 & \nu_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{Bmatrix} \quad (\text{付 1. 1 9})$$

(付 1. 1 9) 式では，(付 1. 1 8) 式の  $\nu_{11}$ ， $\nu_{22}$ ， $\nu_{33}$  の代りに  $\nu_x$ ， $\nu_y$ ， $\nu_z$  を用いた。(付 1. 1 9) 式に(付 1. 9) 式を代入すると，

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_x & 0 & 0 \\ 0 & \nu_y & 0 \\ 0 & 0 & \nu_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\text{rot } \mathbf{A})_x \\ (\text{rot } \mathbf{A})_y \\ (\text{rot } \mathbf{A})_z \end{Bmatrix} \quad (\text{付 1. 2 0})$$

ここで、例えば  $(\text{rot } \mathbf{A})_x$  は  $\text{rot } \mathbf{A}$  の  $x$  方向成分を示す。

一例として、(付 1. 1 7) 式の  $x$  方向成分  $\{\text{rot}(\nu \text{rot } \mathbf{A})\}_x = J_{0x} - \sigma \frac{\partial A_x}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \phi}{\partial x}$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} \{\text{rot}(\nu \text{rot } \mathbf{A})\}_x &= \frac{\partial}{\partial y} (\nu \text{rot } \mathbf{A})_z - \frac{\partial}{\partial z} (\nu \text{rot } \mathbf{A})_y \\ &= J_{0x} - \sigma \frac{\partial A_x}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{付 1. 2 1})$$

ここで、 $J_{0x}$  は  $J_0$  の  $x$  方向成分を示す。 $(\nu \text{rot } \mathbf{A})_y$ 、 $(\nu \text{rot } \mathbf{A})_z$  は (付 1. 2 0) 式より、

$$\left. \begin{aligned} (\nu \text{rot } \mathbf{A})_y &= \nu_y (\text{rot } \mathbf{A})_y \\ (\nu \text{rot } \mathbf{A})_z &= \nu_z (\text{rot } \mathbf{A})_z \end{aligned} \right\} \quad (\text{付 1. 2 2})$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \{\text{rot}(\nu \text{rot } \mathbf{A})\}_x &= \frac{\partial}{\partial y} \{ \nu_z (\text{rot } \mathbf{A})_z \} - \frac{\partial}{\partial z} \{ \nu_y (\text{rot } \mathbf{A})_y \} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_z \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \nu_y \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right\} \\ &= J_{0x} - \sigma \frac{\partial A_x}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{付 1. 2 3})$$

他の成分も同様にして，結局（付 1. 1 7）式は次式のように成分表示される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\nu_z \frac{\partial A_y}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu_y \frac{\partial A_z}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\nu_z \frac{\partial A_x}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\nu_y \frac{\partial A_x}{\partial z}) &= J_{ox} - \sigma \frac{\partial A_x}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z}(\nu_x \frac{\partial A_z}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x}(\nu_z \frac{\partial A_x}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\nu_x \frac{\partial A_y}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial x}(\nu_z \frac{\partial A_y}{\partial x}) &= J_{oy} - \sigma \frac{\partial A_y}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x}(\nu_y \frac{\partial A_x}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu_x \frac{\partial A_y}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial x}(\nu_y \frac{\partial A_z}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\nu_x \frac{\partial A_z}{\partial y}) &= J_{oz} - \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (\text{付 1. 2 4})$$

二次元電磁界では， $A$  及び  $J_o$  は  $z$  方向成分のみを有するので，（付 1. 2 4）式において  $A_x = A_y = 0$ ， $J_{ox} = J_{oy} = 0$  とおき，かつ  $A_z$  は  $z$  方向には一定であるとすれば，次式のような二次元電磁界の式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nu_y \frac{\partial A}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu_x \frac{\partial A}{\partial y}) = -J_o + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{付 1. 2 5})$$

簡単のため，上式では  $A_z$ ， $J_{oz}$  を  $A$ ， $J_o$  で表した。

## 第 2 章 外部電源を考慮した有限要素法における全体節点方程式及びベクトルポテンシャル，電流及び端子電圧間の関係式の一般形

### 2. 1 全体節点方程式

ここでは，本文の（1. 2）式の全体節点方程式を導出する。なお要素としては，本文第 1. 1 6 図のような一次三角形要素を用いる。

一次三角形要素を用いた有限要素法では、要素内の任意の点  $P(x, y)$  のベクトルポテンシャル  $A^{(e)}$  は、座標  $x, y$  を用いて次式で近似できる。

$$A^{(e)} = \alpha_{1e} + \alpha_{2e}x + \alpha_{3e}y = \begin{Bmatrix} 1 & x & y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{1e} \\ \alpha_{2e} \\ \alpha_{3e} \end{Bmatrix} \quad (\text{付 2. 1})$$

ここで、 $\alpha_{1e}, \alpha_{2e}, \alpha_{3e}$  は要素ごとに異なる定数である。(付 2. 1) 式に要素  $e$  の各節点  $1e, 2e, 3e$  の座標及びポテンシャルを代入すれば、次の連立方程式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} A_{1e} \\ A_{2e} \\ A_{3e} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x_{1e} & y_{1e} \\ 1 & x_{2e} & y_{2e} \\ 1 & x_{3e} & y_{3e} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{1e} \\ \alpha_{2e} \\ \alpha_{3e} \end{Bmatrix} \quad (\text{付 2. 2})$$

上式を  $\alpha_{1e}, \alpha_{2e}, \alpha_{3e}$  について解き、これを (付 2. 1) 式に代入すれば、

$$A^{(e)} = \begin{Bmatrix} 1 & x & y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & x_{1e} & y_{1e} \\ 1 & x_{2e} & y_{2e} \\ 1 & x_{3e} & y_{3e} \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} A_{1e} \\ A_{2e} \\ A_{3e} \end{Bmatrix} \quad (\text{付 2. 3})$$

(付 2. 3) 式を書直すと、

$$A^{(e)} = \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} 1 & x & y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_{1e} & b_{2e} & b_{3e} \\ c_{1e} & c_{2e} & c_{3e} \\ d_{1e} & d_{2e} & d_{3e} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{1e} \\ A_{2e} \\ A_{3e} \end{Bmatrix} \quad (\text{付 2. 4})$$

ここで、 $\Delta$  は要素の面積を表す。また、 $b_{1e}, c_{1e}, d_{1e}$  等を具体的に計算すると次式のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} b_{1e} &= x_{je}y_{ke} - x_{ke}y_{je} \\ c_{1e} &= y_{je} - y_{ke} \\ d_{1e} &= x_{ke} - x_{je} \end{aligned} \right\} \quad (\text{付 2. 5})$$

ただし，  $ie, je, ke$  は循環する添字で，例えば  $ie=2$  のとき，  $je=3$ ，  
 $ke=1$  を表すものとする。。

ここで，次のような補間関数  $N1e, N2e, N3e$  を定義する。

$$\{N1e, N2e, N3e\} = \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} 1 & x & y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1e} & b_{2e} & b_{3e} \\ c_{1e} & c_{2e} & c_{3e} \\ d_{1e} & d_{2e} & d_{3e} \end{bmatrix} \quad (\text{付 2. 6})$$

(付 2. 6) 式を (付 2. 4) 式に代入すると，

$$A^{(e)} = \sum_{j=1}^3 N_{je} A_{je} \quad (\text{付 2. 7})$$

ここでは電磁界の基礎方程式として，付録第 1 章の (付 1. 2 5) 式の  
 右辺第 3 項を無視したものを取扱う。(付 1. 2 5) 式をオイラーの方程  
 式とする要素  $e$  の汎関数  $\chi^{(e)}$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \chi^{(e)} = & \iint_{S^{(e)}} \left( \int_0^B \nu B dB \right) dx dy - \iint_{S^{(e)}} J_0 A dx dy \\ & + \sigma \iint_{S^{(e)}} \left( \int_0^A \frac{\partial A}{\partial t} dA \right) dx dy \end{aligned} \quad (\text{付 2. 8})$$

ここで， $S^{(e)}$  は要素  $e$  の領域を示す。上式を節点  $ie$  のポテンシャル  $A_{ie}$   
 で偏微分すれば，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial A_{ie}} = & \iint_{S^{(e)}} \frac{\partial B}{\partial A_{ie}} \nu B dx dy - \iint_{S^{(e)}} J_0 \frac{\partial A}{\partial A_{ie}} dx dy \\ & + \sigma \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S^{(e)}} \left( \int_0^A \frac{\partial A}{\partial A_{ie}} dA \right) dx dy \end{aligned} \quad (\text{付 2. 9})$$



ところで，要素内の磁束密度  $\mathbf{B}$  は次式で表される。

$$\mathbf{B} = \frac{\partial A}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \mathbf{j} \quad (\text{付 2. 10})$$

ここで， $\mathbf{i}$ ， $\mathbf{j}$  は  $x$  及び  $y$  方向の単位ベクトルである。(付 2. 7)，  
(付 2. 10) 式を (付 2. 9) 式に代入し， $\nu$  が付録第 1 章で述べたようにテンソルであることに注意すれば，次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial A_{ie}} = & \iint_{S^{(e)}} \left\{ \sum_{j=1}^3 (\nu_y \frac{\partial N_{ie}}{\partial x} \frac{\partial N_{je}}{\partial x} + \nu_x \frac{\partial N_{ie}}{\partial y} \frac{\partial N_{je}}{\partial y}) A_{je} \right\} dx dy \\ & - \iint_{S^{(e)}} J_0 N_{ie} dx dy + \sigma \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S^{(e)}} \sum_{j=1}^3 N_{ie} N_{je} A_{je} dx dy \end{aligned} \quad (\text{付 2. 11})$$

補間関数  $N_{ie}$  と面積座標  $\zeta_{ie}$  間には次のような 1 対 1 の対応関係がある。

$$N_{ie} = \zeta_{ie} \quad (i=1, 2, 3) \quad (\text{付 2. 12})$$

この関係と (付 2. 6) 式を (付 2. 11) 式に代入し，積分を実行すれば次式が得られる。

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial A_{ie}} = \sum_{j=1}^3 S_{ij}^{(e)} A_{je} - \frac{\Delta}{3} J_0 + \sum_{j=1}^3 \frac{\sigma \Delta}{12} (1 + \delta_{ij}) \frac{\partial A_{je}}{\partial t} \quad (\text{付 2. 13})$$

ここで， $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。また， $S_{ij}^{(e)}$  は次式で与えられる。

$$S_{ij}^{(e)} = \frac{\nu_y c_{ie} c_{je} + \nu_x d_{ie} d_{je}}{4 \Delta} \quad (\text{付 2. 14})$$

(付 2. 11) 式の積分を行うにあたっては，次の積分公式を用いた。

$$\iint \zeta_1^a \zeta_2^b \zeta_3^c dx dy = 2 \Delta \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} \quad (\text{付 2. 15})$$

本文(1.8)式において、もし、強制電流密度  $\{J_o\}$  を未知数として取扱った場合は、マトリクスの性質が悪くなる。それに対し、強制電流  $\{I_o\}$  を未知数として取扱えば、このようなことはない。そこで、以下では  $\{I_o\}$  を未知数として取扱うが、 $J_o$  と  $I_o$  の間には次式の関係が成立つ。

$$J_o = \frac{I_o \cdot W}{S_w} \quad (\text{付2. 16})$$

ここで、 $W$  は巻線の巻数、 $S_w$  は巻線の占める断面積である。

(付2.13)式の右辺第3項の  $\partial A_{je} / \partial t$  を、例えば後退差分近似し、これに(付2.16)式を代入したものを、3節点  $1e, 2e, 3e$  についてマトリクス形式で書けば次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial A_{1e}} \\ \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial A_{2e}} \\ \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial A_{3e}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11}^{(e)} + \frac{\sigma \Delta}{6 \Delta t} & S_{12}^{(e)} + \frac{\sigma \Delta}{12 \Delta t} & S_{13}^{(e)} + \frac{\sigma \Delta}{12 \Delta t} \\ S_{21}^{(e)} + \frac{\sigma \Delta}{12 \Delta t} & S_{22}^{(e)} + \frac{\sigma \Delta}{6 \Delta t} & S_{23}^{(e)} + \frac{\sigma \Delta}{12 \Delta t} \\ S_{31}^{(e)} + \frac{\sigma \Delta}{12 \Delta t} & S_{32}^{(e)} + \frac{\sigma \Delta}{12 \Delta t} & S_{33}^{(e)} + \frac{\sigma \Delta}{6 \Delta t} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{1e} \\ A_{2e} \\ A_{3e} \end{Bmatrix}$$

$$- \frac{W \Delta}{3 S_w} I_o \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{\sigma \Delta}{12 \Delta t} \begin{Bmatrix} 2A_{1e}' + A_{2e}' + A_{3e}' \\ A_{1e}' + 2A_{2e}' + A_{3e}' \\ A_{1e}' + A_{2e}' + 2A_{3e}' \end{Bmatrix}$$

(付2. 17)

但し，ここでは簡単のため，時刻  $t$  における値の添字は省略し，時刻  $t - \Delta t$  における値にはダッシュ(')をつけた。

独立な強制電流が  $k$  個ある場合，（付 2.17）式を全要素  $1, \dots, ne$  について求め，これを（付 2.18）式に代入すれば，（付 2.19）式が得られる。

$$\frac{\partial \chi}{\partial A_i} = \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial A_i} + \dots + \frac{\partial \chi^{(ne)}}{\partial A_i} = 0 \quad (i=1, \dots, n)$$

（付 2.18）

$$\begin{bmatrix} H_{1,1} & \dots & H_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ & H_{i,j} & \\ \vdots & & \vdots \\ H_{n,1} & \dots & H_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{1,1} & \dots & C_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ & C_{i,f} & \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \dots & C_{n,k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_{o1} \\ \vdots \\ I_{oi} \\ \vdots \\ I_{ok} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix}$$

（付 2.19）

エネルギーが  $A_i$  の関数になっている要素は，節点  $i$  を含む要素のみである。従って，（付 2.19）式の  $H_{ij}$  は次式となる。

$$H_{ij} = \sum_{R_{ij}} \left\{ S_{ij}^{(e)} + \frac{\sigma \Delta}{12 \Delta t} (1 + \delta_{ij}) \right\} \quad (\text{付 2.20})$$

但し， $\sum_{R_{ij}}$  は節点  $i, j$  を含む要素についての総和を表す。また， $C_{i,f}$  は  $f$  番目の独立な強制電流が節点  $i$  を含む要素に流れているときのみ値を持ち，その他の場合は零となる。 $Q_i$  は，（付 2.17）式の右辺第 3 項のような時刻  $t - \Delta t$  における既知のポテンシャルや固定境界節点のポテンシャル等の関数である。

## 2.2 ベクトルポテンシャル，電流及び端子電圧間の関係式

ここでは，本文の(1.5)，(1.6)式より，(1.7)式を導出する。

(1.5)，(1.6)式より，次式が得られる。

$$\begin{aligned} \ell \sum_{i=1}^{ns} \frac{d}{dt} \{ (A_{ai} - A_{di}) + (A_{bi} - A_{ci}) \} \\ + (R_c + R_o) I_o + L_o \frac{\partial I_o}{\partial t} = V_o \end{aligned} \quad (\text{付2. 21})$$

上式の時間微分項を後退差分近似する際，(付2. 17)式の場合と同様に，時刻  $t$  における添字は省略し，時刻  $t - \Delta t$  における値にダッシュ(')をつければ，次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\ell}{\Delta t} \sum_{i=1}^{ns} \left\{ \{ (A_{ai} - A_{ai}') - (A_{di} - A_{di}') \} \right. \\ \left. + \{ (A_{bi} - A_{bi}') - (A_{ci} - A_{ci}') \} \right\} \\ + (R_c + R_o) I_o + \frac{L_o}{\Delta t} (I_o - I_o') = V_o \end{aligned} \quad (\text{付2. 22})$$

未知量を左辺に，既知量を右辺に移項すれば次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\ell}{\Delta t} \sum_{i=1}^{ns} \{ (A_{ai} - A_{di}) + (A_{bi} - A_{ci}) \} \\ + \left\{ (R_c + R_o) + \frac{L_o}{\Delta t} \right\} I_o \\ = V_o + \frac{\ell}{\Delta t} \sum_{i=1}^{ns} \{ (A_{ai}' - A_{di}') + (A_{bi}' - A_{ci}') \} + \frac{L_o}{\Delta t} I_o' \end{aligned} \quad (\text{付2. 23})$$

独立な電流が  $k$  個ある場合について，上式を一般的に書いたのが(1.7)式である。

次に，(付2. 23)式が(1.7)式の1行目の式に対応しているとした

場合の  $F_{1,1}, \dots, F_{1,(n+k)}, V_{01}$  の内容を考察する。もし、節点  $i$  を含む要素が巻線中の要素であれば、 $F_{1,i} (i=1, \dots, n)$  は、 $\ell/\Delta t$  か  $-\ell/\Delta t$  である。(付 2.23) 式の  $I_o$  は (1.7) 式では 1 番目の独立な電流  $I_{01}$  となるので、

$$\left. \begin{aligned} F_{1,(n+1)} &= (R_c + R_o) + \frac{L_o}{\Delta t} \\ F_{1,(n+2)} &= \dots = F_{1,(n+k)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{付 2.24})$$

また、 $V_{01}$  は次式のように、電圧や既知のポテンシャル等の関数となる。

$$V_{01} = V_o + \frac{\ell}{\Delta t} \sum_{i=1}^{ns} \{ (\Delta a_i' - \Delta d_i') + (A b_i' - A c_i') \} + \frac{L_o}{\Delta t} I_o' \quad (\text{付 2.25})$$

### 第 3 章 非対称マトリクスの解法

#### 3.1 概 要

外部電源を考慮した有限要素法及び寸法決定法を導入した有限要素法の係数マトリクスは、第 1 章 (1.8) 式や (1.21) 式のように、非対称マトリクスとなる。文献(7)の節点番号の最適化を行えば、いわゆる(H)マトリクスの部分は、次式のように、対称なバンドマトリクスとなる。

$$\left[ \begin{array}{cc} \text{(H)} & \text{(C)} \\ \text{(F)} & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} A, I_o, D \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} Q, V_o, B_o \end{array} \right\} \quad (\text{付 3.1})$$

上式のような非対称マトリクスの解法については，CG法等が従来検討されているが，これは反復法であるので，マトリクスの性質等によって計算時間及び精度が左右される。ここでは， $[H]$ の部分が対称なバンドマトリクスになることに着目し，この部分に従来のバンドマトリクス法を使用することにより，非対称マトリクスを効率良く計算する手法を述べる。

$H$ マトリクスは対称であるので，（付3.1）式に斜線で示したマトリクスの上半分のみを記憶する。また，斜線で示した $[F]$ ， $[C]$ ， $\{Q, V_0, B_0\}$ の部分も記憶する。計算は $[H]$ の部分ではバンドマトリクス法を，また， $[F]$ ， $[C]$ ， $\{Q, V_0, B_0\}$ の部分はフルマトリクスとして取扱って，通常のガウスの消去法を適用すればよい。

### 3.2 適用例

未知節点数が607の三相誘導電動機を，電流を与えて解く従来の有限要素法（係数マトリクスが対称になる）と外部電源を考慮した有限要素法（係数マトリクスが非対称になる）を用いて解析した。従来の有限要素法にはバンドマトリクス法を，外部電源を考慮した有限要素法には本手法を適用した場合のマトリクスの計算時間の比較を付3.1表に示す。但し，これは電磁場が正弦波状に変化すると仮定して，時間微分項を複素数近似<sup>(7)</sup>した場合の結果である。これより，本手法を用いれば，マトリクスが非対称になっても，従来の対称マトリクスの場合の約20%程度の計算時間の増加で済むことがわかる。

付 3. 1 表 マトリクスの計算時間の比較

	対称マトリクス (従来の有限要素法の場合)	非対称マトリクス (外部電源を考慮した有限要素法の場合)
未知節点数	6 0 7	
計算時間(秒)	4 4. 8	5 4. 6

## 第 4 章 寸法決定法を導入した有限要素法 における全体節点方程式及びベク トルポテンシャル，磁束密度間の 関係式の一般形

### 4. 1 全体節点方程式

ここでは，一次三角形要素を用いた場合の本文( 1. 1 7 )式の全体節点方程式を導出する。

簡単のため，領域内には永久磁石のみが存在している場合を考える。  
寸法修正要素を適用する領域以外の要素  $e$  のエネルギーを  $\chi_t^{(e)}$  とすれば，  
これは次式で表される。

$$\chi_t^{(e)} = \iint_{S^{(e)}} \left( \int_0^B \nu_0 \mathbf{B} d\mathbf{B} \right) dx dy - \iint_{S^{(e)}} \left( \int_0^A \mathbf{J} m dA \right) dx dy \quad (\text{付 4. 1})$$

ここで， $\nu_0$  は空気の磁気抵抗率である。

上式を節点 ie のポテンシャル Aie で偏微分すれば，

$$\frac{\partial \chi_t^{(e)}}{\partial A_{ie}} = \iint_{S^{(e)}} \frac{\partial B}{\partial A_{ie}} \nu_0 B \, dx dy - \iint_{S^{(e)}} \frac{\partial A}{\partial A_{ie}} J_m \, dx dy \quad (\text{付4. 2})$$

(付2. 7)，(付2. 10)式を上式に代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_t^{(e)}}{\partial A_{ie}} = & \iint_{S^{(e)}} \left\{ \sum_{j=1}^3 \nu_0 \left( \frac{\partial N_{ie}}{\partial x} \frac{\partial N_{je}}{\partial x} + \frac{\partial N_{ie}}{\partial y} \frac{\partial N_{je}}{\partial y} \right) A_{je} \right\} dx dy \\ & - \iint_{S^{(e)}} N_{ie} J_m \, dx dy \end{aligned} \quad (\text{付4. 3})$$

上式の積分を実行すれば，(付4. 3)式の右辺第1項は(付2. 13)式の右辺第1項と同じになる。但し，この場合，(付2. 14)式の  $S_{ij}^{(e)}$  の  $\nu_x$ ， $\nu_y$  は  $\nu_0$  となる。(付4. 3)式の右辺第2項は，文献(12)に述べたように次式となる。

$$\frac{\partial \chi_t^{(e)}}{\partial A_{ie}} = \sum_{j=1}^3 S_{ij}^{(e)} A_{je} - J_{mie} \quad (\text{付4. 4})$$

ここで，

$$J_{mie} = \frac{\nu_0}{2} (M_{xd_{ie}} - M_{yc_{ie}}) \quad (\text{付4. 5})$$

簡単のため，寸法修正要素が第1.14図のようにx軸に平行であるとする。この場合の(付2. 13)式に対応する有限要素法の式は，(1.16)式と(付4. 4)式より次式となる。

$$\frac{\partial \chi_t^{(e)}}{\partial A_{ie}} = \sum_{j=1}^3 S_{ij}^{(e)} A_{je} - J_{mie} - \nu_0 \left( M_x \frac{W'}{2} + M_y D \right) \quad (\text{付4. 6})$$

第1.16図の一次三角形要素において，辺1e - 2eがx軸に平行であり，これに寸法修正要素が付加されているとすれば，(付2. 17)式に対応する式は次式となる。



$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial A_{1e}} \\ \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial A_{2e}} \\ \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial A_{3e}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11}^{(e)} & S_{12}^{(e)} & S_{13}^{(e)} \\ S_{21}^{(e)} & S_{22}^{(e)} & S_{23}^{(e)} \\ S_{31}^{(e)} & S_{32}^{(e)} & S_{33}^{(e)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{1e} \\ A_{2e} \\ A_{3e} \end{Bmatrix}$$

$$-\nu_0 M_y D \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_{m1e} + \frac{\nu_0 M_x W'}{2} \\ J_{m2e} + \frac{\nu_0 M_x W'}{2} \\ J_{m3e} \end{Bmatrix} \quad (\text{付 4. 7})$$

寸法修正要素のグループ数を  $r$  とし，(付 2.17)式から(付 2.19)式を得たのと同様の手順を踏めば次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} H_{1,1} & \cdots & H_{1,n} \\ \vdots & H_{i,j} & \vdots \\ H_{n,1} & \cdots & H_{n,n} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{Bmatrix} \\ = - \begin{Bmatrix} C_{1,1}^* & \cdots & C_{1,r}^* \\ \vdots & C_{i,f}^* & \vdots \\ C_{n,1}^* & \cdots & C_{n,r}^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_i \\ \vdots \\ D_r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad (\text{付 4. 8})$$

ここで，

$$H_{ij} = \sum_{R_{ij}} S_{ij}^{(e)} \quad (\text{付 4. 9})$$

また,  $C_{i,f}^*$  は  $f$  番目のグループの寸法修正要素が節点  $i$  を含む時のみ値を持ち, その他の場合は零となる。 $Q_i$  は, (付 4. 7) 式の右辺第 3 項のような等価磁化電流や, 固定境界節点のポテンシャル等の関数である。

#### 4. 2 ベクトルポテンシャル, 磁束密度間の関係式

ここでは, 本文の (1. 1 8) 式より (1. 2 0) 式を導出する。

例えば,  $B_{oxp}$  が与えられている場合のベクトルポテンシャル, 磁束密度間の関係式は, (1. 1 8) 式より,

$$\frac{d_{1e}}{2\Delta} A_{1e} + \frac{d_{2e}}{2\Delta} A_{2e} + \frac{d_{3e}}{2\Delta} A_{3e} = B_{oxp} \quad (\text{付 4. 1 0})$$

$B_{oxp}$  や  $B_{oyp}$  のような磁束密度成分が  $r$  個ある場合について, 上式を一般的に書いたのが (1. 2 0) 式である。

一例として, (付 4. 1 0) 式が (1. 2 0) 式の 1 行目の式に対応しているとした場合の  $F_{1,1}^*, \dots, F_{1,(n+r)}^*, B_{01}$  の内容を考察する。例えば,  $n=5, r=1$  で, 要素  $e$  を構成する節点が 1, 3, 4 であるとすれば, (付 4. 1 0) 式は次式となる。

$$\frac{d_1}{2\Delta} A_1 + \frac{d_3}{2\Delta} A_3 + \frac{d_4}{2\Delta} A_4 = B_{oxp} \quad (\text{付 4. 1 1})$$

これを, (1. 2 0) 式のようにマトリクス形式で書けば,

$$\left\{ \frac{d_1}{2\Delta} \quad 0 \quad \frac{d_3}{2\Delta} \quad \frac{d_4}{2\Delta} \quad 0 \quad 0 \right\} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ D \end{Bmatrix} = B_{oxp} \quad (\text{付 4. 1 2})$$

すなわち,  $F_{1,1}^* = d_1/2\Delta$ ,  $F_{1,3}^* = d_3/2\Delta$ ,  $F_{1,4}^* = d_4/2\Delta$ ,  $F_{1,2}^* = F_{1,5}^* = F_{1,6}^* = 0$ ,  $B_{01} = B_{0xp}$  となる。一般に, 要素  $e$  を構成する節点が  $i, j, k$  であるとすれば,

$$\left. \begin{aligned} F_{1,i}^* &= \frac{d_i}{2\Delta} \\ F_{1,j}^* &= \frac{d_j}{2\Delta} \\ F_{1,k}^* &= \frac{d_k}{2\Delta} \end{aligned} \right\} \quad (\text{付4. 13})$$

であり, それ以外の  $\{F^*\}$  は零となる。